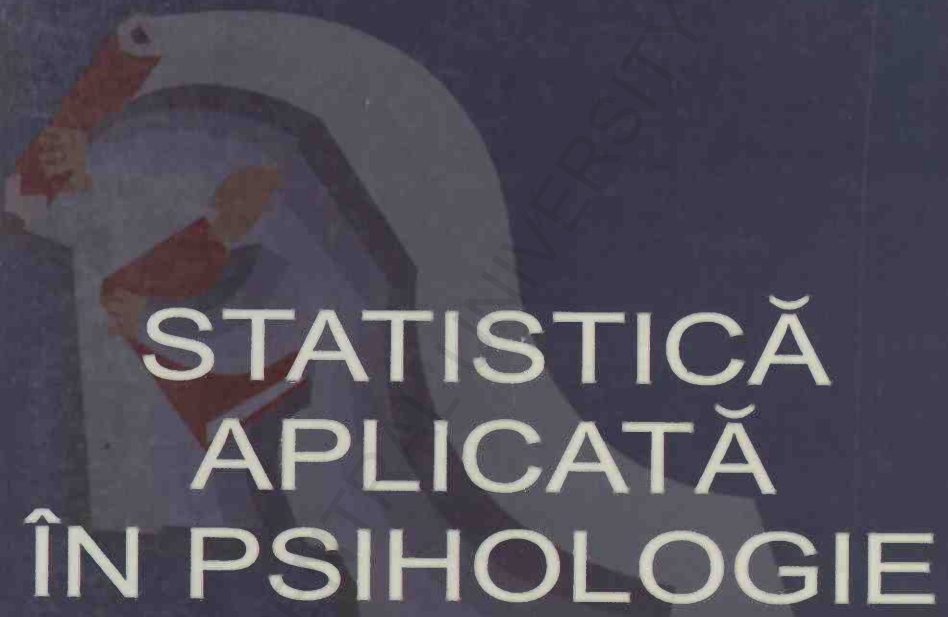
Universitatea „Titu Maiorescu"
Facultatea de Psihologie

DUMITRU GHEORGHIU



STATISTICĂ APLICATĂ ÎN PSIHOLOGIE

II 358.674

Titu Maiorescu

BIBL. CENTR. UNIV.
„M. EMINESCU" IAŞI
II 358.674

BCU IASI/CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Dumitru Gheorghiu

STATISTICĂ APLICATĂ ÎN PSIHOLOGIE

Bucureşti, 2003

BCU IASI/CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Redactor: Cătălina Hîrceag
Tehnoredactor: Rodica Niţă

© Editura Universităţii *Titu Maiorescu*, 2002
Bucureşti, România
Str. Dionisie Lupu nr. 70, sector 1
tel.: (00401) 650.74.30
fax: (00401) 311.22.97

© *Toate drepturile asupra prezentei ediţii sunt rezervate*
Editurii Universităţii Titu Maiorescu.
Orice reproducere, preluare parţială sau integrală,
prin orice mijloc, a textului este interzisă,
acesta fiind proprietatea exclusivă a editorului.

Descrierea CIP a Bibliotecii Naţionale a României
GHEORGHIU, DUMITRU
Statistică aplicată în psihologie / Dumitru Gheorghiu -
Bucureşti : Universitatea „Titu Maiorescu", 2003
ISBN 973-86202-2-8

311:159.9

BCU IASI/CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Dumitru Gheorghiu

STATISTICĂ APLICATĂ ÎN PSIHOLOGIE

334128

ALE

358937
B.C.U. IASI

editura universitătii Titu Maiorescu

BCU IASI/CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

BCU IASI/CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

2 4 NOV. 2003

1. INTRODUCERE

Cuvântul *statistică* este folosit cu diferite înțelesuri în diferite contexte. La sfârșitul unei transmisiuni televizate a unui meci de fotbal, ni se prezintă o „statistică" privind numărul de șuturi pe poartă, numărul de cornere, numărul de cartonașe galbene și roșii etc. Meteorologii prezintă zilnic statistici despre temperaturi și cantitatea de precipitații. Matematicienii și cercetătorii din domeniul științelor omului și ale naturii vorbesc despre statistică într-un fel diferit. Matematicienii au în vedere un domeniu important al matematicii, numit adesea *statistică teoretică*, iar cercetătorii se referă la aplicarea unor metode statistice pentru analiza rezultatelor unor investigații specifice. În pofida acestor diferențe, cuvântul *statistică* este utilizat corect în fiecare context în parte. Redactorii transmisiunilor sportive și meteorologii folosesc cuvântul *statistică* pentru a se referi la informații numerice despre meciurile de fotbal, respectiv despre vreme, iar matematicienii folosesc acest cuvânt în sensul unei teorii și al unor metode fundamentale, ce pot fi folosite pentru analiza unor informații.

În această carte vom avea în vedere, în principal, *statistica aplicată în psihologie*. Vom începe prin a evidenția rolul statisticii în cercetarea psihologică, după care vom trece în revistă câteva operații matematice de bază, necesare pentru a înțelege statistica. În restul acestui capitol vom introduce câteva noțiuni fundamentale, folosite în statistică.

1.1. ROLUL STATISTICII ÎN CERCETAREA PSIHOLOGICĂ

Pentru psiholog și, în general, pentru cercetătorul în domeniul științelor omului, **statistica** este un set de metode și tehnici matematice de organizare și prelucrare a datelor, folosite cu scopul de a răspunde la anumite întrebări și de a testa anumite ipoteze. **Datele** sunt informații, în principal numerice, ce reprezintă anumite caracteristici. De pildă, dacă dorim să cunoaștem nivelul de anxietate al unui grup, datele pot fi *scoruri* pe o scală de anxietate, iar tehnicile statistice ne ajută să descriem și să înțelegem aceste scoruri.

Științele omului folosesc o mare cantitate de date pentru testarea ipotezelor și formularea unor teorii. Este important de subliniat, însă, că strângerea datelor nu este, în sine, suficientă pentru cercetarea științifică. Chiar și cele mai obiective și mai atent culese informații, luate ca atare, nu ne pot „spune" mare lucru. Pentru a fi utile, datele trebuie să fie organizate, evaluate și analizate. Fără o bună înțelegere a principiilor analizei statistice și fără o aplicare corespunzătoare a tehnicilor statistice, cercetătorul nu va putea înțelege semnificația datelor culese.

Analiza statistică este esențială în psihologie, ca și în celelalte științe ale omului. Se poate spune chiar că psihologia nu poate exista fără statistică. Pe de altă parte, rolul statisticii este limitat. Pentru a explica aceasta, vom evidenția pe scurt cele trei etape principale ale unei cercetări. Astfel, în etapa *formulării problemei de cercetare*, cercetătorul formulează un enunț al unei probleme sau al unei întrebări la care cercetarea va încerca să dea un răspuns. Problema cercetării poate să provină din diferite surse, incluzând teorii, cercetări anterioare și comenzi de cercetare. Odată ce a fost formulată problema cercetării, procesul intră într-o a doua etapă, în care *se iau decizii privind proiectul de cercetare și se aleg metodele și tehnicile de cercetare*. În această etapă, cercetătorul decide ce tipuri de cazuri vor fi incluse în cercetare, cât de multe cazuri vor fi luate în considerare și în ce mod vor fi investigate acestea. După ce au fost investigate toate cazurile și au fost culese toate datele relevante, statistica devine realmente și în mod direct importantă pentru *analiza rezultatelor*. Este important de reținut că, *dacă cercetătorul și-a formulat greșit problema sau a proiectat greșit cercetarea, atunci cele mai sofisticate analize statistice sunt lipsite de valoare*. Împrumutând un „principiu" din știința computerelor, putem spune că metodele și tehnicile statistice se supun regulii IGIG = „introduci gunoaie, ies gunoaie". Oricât ar fi de utilă, statistica nu se poate substitui conceptualizării riguroase și nici alcătuirii unui proiect de cercetare corespunzător problemei avute în vedere.

Multe persoane care nu sunt cercetători trebuie să fie consumatori avizați de rezultate de cercetare, prelucrate statistic. Statistica oferă adesea suport rațional pentru decizii ale managerilor din sistemul educațional, pentru consilierii educaționali, pentru psihologii clinicieni și pentru alte persoane, ale căror profesii sunt legate într-un fel sau altul de științele omului. Oricare ar fi motivul pentru care se utilizează metode și tehnici statistice, atât cercetătorii, cât și „consumatorii" cercetărilor trebuie să înțeleagă ce fel de informații oferă statistica și ce fel de concluzii pot fi trase din aceste informații.

În această carte, statistica va fi privită ca un set de „instrumente", indispensabil pentru creșterea cunoașterii în științele omului, iar nu ca un scop în sine. Ca atare, nu vom da o abordare „matematică" a acestui subiect. Tehnicile statistice pe care le vom prezenta sunt văzute ca instrumente folosite pentru a răspunde unor probleme de cercetare specifice psihologiei (altfel spus, această carte nu este destinată statisticianului profesionist, ci psihologului). Pe de altă parte, aceasta nu înseamnă că nu

vor fi folosite anumite metode matematice. Această carte a fost scrisă cu intenția de a furniza îndeajuns material matematic pentru a se putea înțelege ce poate face statistica și cum face statistica ceea ce face. După ce veți parcurge întregul material, vă veți familiariza cu avantajele și limitele celor mai frecvent utilizate tehnici statistice și veți ști care dintre acestea sunt aplicabile unei mulțimi date de informații și unui scop dat al cercetării. În cele din urmă, veți putea întreprinde singuri analize statistice de bază ale datelor strânse din cercetări proprii.

1.2. MATEMATICA DE BAZĂ

În statistică sunt folosite metode matematice, de la cele mai simple până la cele mai complexe. Înțelegerea materialului prezentat în această carte nu cere o cunoaștere avansată a matematicii, ci doar o familiarizare cu aritmetica, algebra elementară și cu unele simboluri matematice folosite cu precădere în statistică. În această secțiune, vom întreprinde o scurtă trecere în revistă a unor concepte și operații aritmetice, pe care orice cititor cu o pregătire medie în domeniul matematicii o poate neglija.

1.2.1. Operații aritmetice de bază

Statistica folosește din plin cele patru *operații aritmetice de bază*: adunarea (+), scăderea (–), înmulțirea și împărțirea. Rezultatul unei adunări se numește *sumă*, iar rezultatul operației de scădere se numește *diferență*. Înmulțirea a două numere poate fi denotată algebric în trei feluri: $X \cdot Y$, $(X)(Y)$ sau pur și simplu XY. Numerele care sunt înmulțite se numesc *factori*, iar rezultatul operației de înmulțire se numește *produs*. Împărțirea a două numere poate fi, de asemenea, denotată în trei feluri: $X \div Y$, X/Y sau $\frac{X}{Y}$.

În notația folosită aici, X este *numărătorul*, Y fiind *numitorul*. Rezultatul operației de împărțire se numește *cât*.

Este important de reținut relația dintre înmulțire și împărțire. Astfel, câtul X/Y poate fi exprimat ca produsul $(X)(1/Y)$. De exemplu, $15/5 = (15)(1/5) = 3$.

1.2.2. Operații aritmetice cu numere reale

În aritmetica elementară suntem familiarizați cu *numerele pozitive*, i.e. numerele mai mari sau egale cu 0. Statistica trebuie să folosească ceea ce matematicienii numesc *numere reale*. **Numerele reale** sunt toate numerele pozitive și negative, de la $-\infty$ la $+\infty$. Astfel, numerele reale includ nu numai numerele întregi pozitive și negative, ci și fracțiile și numerele zecimale.

Atunci când se folosesc atât numere pozitive, cât şi numere negative într-o operaţie aritmetică, se vorbeşte despre *numere cu semn*. Uneori este nevoie să ignorăm semnul algebric, + sau –, şi să considerăm doar **valoarea absolută** a numărului – valoarea numărului indiferent de semnul algebric. De pildă, valoarea absolută (modulul) numărului –7, notată |–7|, este 7. În valori absolute, |–7| = |+7| = 7.

Semnul algebric din faţa unui număr afectează rezultatul operaţiilor algebrice. În cele ce urmează vom urmări aceste efecte, pe măsură ce vom expune regulile pentru operaţiile aritmetice.

Adunarea. Dacă două numere au acelaşi semn, se adună valorile absolute şi se reţine semnul respectiv:

$$(-10) + (-25) = -35$$
$$(+15) + (+5) = +20$$

Dacă se adună două numere care au semne opuse, se scade valoarea absolută a numărului mai mic din valoarea absolută a celuilalt număr şi se reţine semnul numărului care are valoarea absolută mai mare:

$$(-10) + (+15) = +5$$
$$(+5) + (-25) = -20$$

Scăderea. Când se scad numere, se schimbă semnul numărului de scăzut, după care se aplică regulile adunării:

$$(-10) - (+5) = (-10) + (-5) = -15$$
$$(-10) - (-25) = (-10) + (+25) = +15$$

Înmulţirea. Dacă se înmulţesc două numere care au acelaşi semn, produsul este pozitiv, iar dacă se înmulţesc două numere care au semne diferite, produsul este negativ:

$$(-10)\,(-25) = +250$$
$$(-10)\,(+15) = -150$$

Împărţirea. Dacă se împart două numere care au acelaşi semn, câtul este pozitiv, iar dacă se împart două numere care au semne diferite, câtul este negativ:

$$-10/-25 = +0{,}40$$
$$+15/-10 = -1{,}50$$

1.2.3. Proprietăţi ale numerelor reale

Numerele reale au trei proprietăţi importante, care sunt utilizate în formulele şi calculele statistice: *comutativitatea, asociativitatea* şi *distributivitatea înmulţirii faţă de adunare.*

B.C.U. „M. EMINESCU" IAŞI

Comutativitatea. Două numere pot fi adunate sau înmulţite în orice ordine, rezultatul fiind acelaşi:

$$15 + 5 = 5 + 15 = 20$$

$$15 \cdot 5 = 5 \cdot 15 = 75$$

Asociativitatea. Termenii unei adunări sau factorii unui produs pot fi grupaţi oricum, rezultatul fiind acelaşi:

$$-10 + (15 + 5) = (-10 + 15) + 5 = 10$$

$$(-10)(15 \cdot 5) = (-10 \cdot 15)\, 5 = -750$$

Distributivitatea. Produsul unui număr X cu suma a două numere, Y şi Z, este egal cu suma produselor lui X cu Y şi lui X cu Z:

$$5(-10 + 15) = 5(-10) + (5 \cdot 15) = 25$$

1.2.4. Indicatori speciali ai operaţiilor aritmetice

Doi indicatori speciali ai operaţiilor aritmetice apar frecvent în statistică: *exponentul, radicalul* şi *operatorul însumării*. **Exponentul** indică puterea la care este ridicat un număr. Astfel, X^2 desemnează ridicarea la pătrat a numărului X sau, altfel spus, înmulţirea numărului X cu sine: $X \cdot X$, iar X^4 desemnează ridicarea la puterea a patra a numărului X: $X \cdot X \cdot X \cdot X$.

Radicalul indică extragerea rădăcinii unui număr. În statistică apare cel mai frecvent extragerea rădăcinii pătrate a unui număr. *Rădăcina pătrată* a unui număr, indicată de simbolul $\sqrt{\ }$, este numărul real prin a cărui ridicare la pătrat se obţine numărul iniţial. Astfel, $\sqrt{36} = 6$, deoarece $6^2 = 36$. Rădăcina pătrată a unui număr poate fi indicată şi prin exponentul fracţional ½. De pildă, $\sqrt{36} = 6^{1/2} = 6$.

Operatorul însumării, simbolizat de majuscula din alfabetul grecesc *sigma*, Σ, indică însumarea a ceea ce urmează imediat în expresia respectivă. Date fiind, de pildă, numerele

$$X_1 = 3, X_2 = 7, X_3 = 4, X_4 = 2, X_5 = 8,$$

expresia $\sum_{i=1}^{5} X_i$, citită „sumă de X indice i de la $i = 1$ la 5" stă pentru suma

$$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 = 3 + 7 + 4 + 2 + 8 = 24$$

X_i este simbolul general pentru numerele din seria de mai sus. Notaţia de sub Σ, $i = 1$, indică primul număr din sumă, $X_1 = 3$, iar numărul înscris deasupra simbolului Σ arată până la al câtelea număr are loc însumarea, $X_5 = 8$. În general, expresia

$$\sum_{i=1}^{N} X_i$$

arată că însumarea începe cu primul număr din seria respectivă şi se încheie cu cel de-al N-lea număr. Adesea, notaţiile aflate deasupra şi dedesubtul simbolului Σ sunt omise. Într-un astfel de caz, Σ indică însumarea de la primul număr până la ultimul.

Prezentăm în continuare două reguli privind operatorul însumării:

Regula 1. Rezultatul obţinut prin aplicarea operatorului Σ la produsul dintre o constantă şi o serie de numere este egal cu rezultatul obţinut prin înmulţirea constantei cu suma numerelor din serie. În simboluri, dacă C este o constantă,

$$\sum_{i=1}^{N} CX_i = C\sum_{i=1}^{N} X_i$$

Fie constanta 2 şi numerele $X_1 = 1, X_2 = 3, X_3 = 4, X_4 = 7$; atunci,

$$\sum_{i=1}^{4} 2X_i = (2 \cdot 1) + (2 \cdot 3) + (2 \cdot 4) + (2 \cdot 7) = 2 + 6 + 8 + 14 = 30$$

$$2\sum_{i=1}^{4} X_i = 2(1 + 3 + 4 + 7) = 2 \cdot 15 = 30$$

Regula 2. Rezultatul obţinut prin aplicarea operatorului Σ la suma a două sau mai multe serii de câte N numere este egal cu rezultatul obţinut prin aplicarea operatorului Σ la fiecare serie în parte şi adunarea sumelor astfel obţinute. În simboluri:

$$\sum_{i=1}^{N}(X_i + Y_i) = \sum_{i=1}^{N} X_i + \sum_{i=1}^{N} Y_i$$

Fie seriile $X_1 = 2, X_2 = 5, X_3 = 3, X_4 = 1$ şi $Y_1 = 1, Y_2 = 3, Y_3 = 4, Y_4 = 7$; atunci,

$$\sum_{i=1}^{N}(X_i + Y_i) = (X_1 + Y_1) + (X_2 + Y_2) + (X_3 + Y_3) + (X_4 + Y_4) =$$

$$= (2 + 7) + (5 + 9) + (3 + 6) + (1 + 5) = 9 + 1 + 4 + 9 + 6 + = 38$$

$$\sum_{i=1}^{N} X_i + \sum_{i=1}^{N} Y_i = (X_1 + X_2 + X_3 + X_4) + (Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4) =$$

$$= (2 + 5 + 3 + 1) + (7 + 9 + 6 + 5) = 11 + 27 = 38$$

1.3. STATISTICI DESCRIPTIVE ŞI STATISTICI INFERENŢIALE

Pentru cele ce urmează, este necesar să definim termenii *variabilă, populaţie* şi *eşantion*. O **variabilă** este orice trăsătură ce îşi poate schimba valoarea de la caz la caz. De pildă, trăsăturile *sex, vârstă* şi *venit* sunt variabile. O **populaţie** este un grup ce include toate cazurile de care este interesat cercetătorul. De pildă, toţi cetăţenii români cu drept de vot, toţi studenţii unei universităţi şi toate ţările europene sunt populaţii în înţelesul dat acestui cuvânt în statistică. În cele mai multe situaţii de cercetare, populaţiile sunt prea mari pentru a fi cercetate. În astfel de cazuri, se selectează o submulţime strictă a populaţiei de referinţă, numită **eşantion**.

Tehnicile statistice se împart în două mari clase: statistici descriptive şi statistici inferenţiale. **Statisticile descriptive** sunt utilizate pentru a prezenta, clasifica şi însuma scorurile (valorile) unei variabile. Dacă ne interesează descrierea unei singure variabile, atunci vom folosi statistici descriptive pentru a aranja şi prelucra scorurile acelei variabile astfel încât informaţia relevantă să poată fi înţeleasă şi evaluată rapid.

Statisticile inferenţiale sunt utilizate pentru a face generalizări despre o populaţie pe baza studiului unui eşantion din acea populaţie sau, altfel spus, pentru a trage concluzii despre caracteristicile unei populaţii pe baza caracteristicilor corespunzătoare unui eşantion din acea populaţie.

1.4. NIVELURI DE MĂSURĂ

Orice tehnică statistică implică utilizarea unor operaţii, precum ordonarea unor cazuri sau însumarea scorurilor unei variabile. Înainte de a utiliza o tehnică statistică, este necesară măsurarea variabilei de interes într-un mod sau, altfel spus, la un *nivel de măsură* care să justifice aplicarea operaţiilor respective. De pildă, multe tehnici statistice cer adunarea scorurilor unei variabile. Aceste tehnici pot fi utilizate numai dacă variabila este măsurată într-un mod ce permite operaţia matematică a adunării. Astfel, alegerea unei tehnici statistice depinde de nivelul la care a fost măsurată variabila. Nivelurile de măsură ale variabilelor sunt clasificate într-o ierarhie, în funcţie de complexitatea lor. Această ierarhie include, în ordinea crescătoare a complexităţii, nivelurile nominal, ordinal, de interval şi de raport.

1.4.1. Nivelul nominal

Măsurarea unei variabile la nivel nominal constă în clasificarea diferitelor cazuri în categoriile prestabilite ale unei variabile. La nivel nominal, clasificarea este singura procedură de măsurare permisă. Variabilele *sex, denominația religioasă* (apartenența religioasă declarată) și *culoarea ochilor* sunt exemple de variabile măsurabile numai la nivel nominal. Categoriile nu pot fi ordonate după vreun criteriu, putând fi comparate unele cu altele exclusiv după numărul de cazuri clasificate în fiecare categorie. De pildă, dacă dorim să măsurăm denominația religioasă pentru un grup de persoane, prestabilim categorii precum Creștin-ortodox, Catolic, Protestant ș.a., dar nu putem ordona aceste categorii de la „superior" la „inferior" sau în vreun alt fel.

Criteriile (regulile) măsurării nominale corecte sunt următoarele:

Regula excluderii categoriilor. Categoriile variabilei trebuie să fie reciproc exclusive, ceea ce înseamnă că nici un caz nu trebuie să facă parte din mai mult de o categorie. În raport cu această regulă, distingem două tipuri de erori: (1) cel puțin două categorii au cazuri în comun, fiecare categorie conținând și cazuri ce nu aparțin celeilalte categorii; (2) cel puțin două categorii aflate în raport de incluziune – orice caz care face parte dintr-o categorie face parte și din cealaltă categorie, nu și reciproc.

Regula exhaustivității categoriilor. Trebuie să apară câte o categorie pentru fiecare manifestare a variabilei respective sau, altfel spus, fiecare caz de interes trebuie să facă parte dintr-o categorie. Având în vedere complexitatea manifestărilor variabilelor considerate în științele omului, pentru respectarea acestei reguli se obișnuiește să se adauge o categorie „Alții" / „Altele".

Regula omogenității categoriilor. Categoriile trebuie să fie omogene în termenii proiectului de cercetare urmărit, ceea ce înseamnă că proprietățile comune cazurilor repartizate în aceeași categorie trebuie să fie mai importante în raport cu scopurile cercetării decât proprietățile ce diferențiază acele cazuri. Să presupunem, de pildă, că indivizii dintr-o colectivitate sunt clasificați în categoriile: *folosește de obicei aspirină efervescentă, folosește de obicei aspirină obișnuită, folosește uneori un tip de aspirină și alteori celălalt tip de aspirină, nu folosește deloc aspirină.* Aceste categorii vor fi apreciate ca omogene de un distribuitor de produse

farmaceutice, în timp ce un distribuitor de cafea va prefera clasificarea aceloraşi indivizi în categoriile: *consumă de obicei cafea naturală, consumă de obicei cafea solubilă, consumă uneori un tip de cafea şi alteori celălalt tip de cafea, nu consumă deloc cafea.*

În legătură cu măsurarea nominală, trebuie considerat şi un al patrulea criteriu de acceptabilitate, conform căruia o clasificare trebuie să aibă sens teoretic sau, altfel spus, categoriile trebuie să poată fi folosite pentru explicaţie şi înţelegere. Putem repartiza, de pildă, orice în univers în clasa bursucilor sau în clasa non-bursucilor, dar o astfel de clasificare nu ar avea nici o importanţă pentru cunoaştere.

1.4.2. Nivelul ordinal

În cazul măsurării la nivel ordinal, pe lângă clasificarea cazurilor în categorii, cazurile repartizate într-o categorie sau alta pot fi ordonate, comparându-le unul cu altul, de la „inferior" la „superior", în funcţie de gradul calitativ în care acestea posedă trăsătura măsurată. De pildă, variabila *nivel de şcolarizare* este măsurabilă la nivel ordinal. Categoriile acestei variabile sunt adesea ordonate conform următoarei scheme: 1. *nu a absolvit nici o şcoală;* 2. *a absolvit cel mult ciclul obligatoriu de învăţământ*; 3. *a absolvit cel mult liceul*; 4. *a absolvit cel mult cursuri postliceale, neuniversitare*; 5. *a absolvit cel mult cursuri universitare*; 6. *a absolvit cursuri postuniversitare.* Aceste categorii sunt exhaustive şi reciproc exclusive şi pot fi comparate în termenii numărului de cazuri pe care le conţin. În plus, categoriile şi cazurile individuale pot fi comparate sub aspectul trăsăturii măsurate. Putem spune, de pildă, că un individ clasificat în categoria a II-a are un nivel de şcolarizare inferior unui individ clasificat în categoria a IV-a, respectiv că un individ clasificat în categoria a IV-a are un nivel de şcolarizare superior unui individ clasificat în categoria a II-a.

La nivel ordinal, deşi există o „distanţă" între oricare două cazuri aflate în categorii diferite, această distanţă nu poate fi descrisă în termeni precişi. În exemplul nostru, nu suntem îndreptăţiţi să spunem, de pildă, că distanţa dintre un individ aflat în categoria a II-a şi un individ aflat în categoria a IV-a este egală cu distanţa dintre un individ aflat în categoria a IV-a şi un individ aflat în categoria a VI-a şi nici că un individ aflat în categoria a IV-a are un nivel de şcolarizare de două ori mai mare decât un individ aflat în categoria a II-a.

Întrucât la nivel ordinal nu suntem îndreptăţiţi să presupunem că distanţele dintre cazuri sau scoruri sunt egale, iar operaţiile de adunare,

scădere, înmulțire și împărțire pot fi aplicate în mod legitim numai dacă intervalele dintre scoruri sunt egale, aceste operații nu pot fi aplicate variabilelor măsurate la nivel ordinal.

1.4.3. Nivelul de interval

În măsurarea la nivel de interval, pe lângă clasificare și ordonare, distanțele (intervalele) dintre oricare două cazuri aflate în categorii succesive sunt egale. Cu alte cuvinte, la acest nivel variabilele sunt măsurabile în unități ce au intervale egale. În legătură cu timbrele dintr-o colecție, *anul emiterii* este un exemplu de variabilă măsurabilă la nivel de interval: timbrele repartizate într-o categorie sau alta pot fi numărate, se poate spune că un timbru emis, să zicem, în 1990 este mai recent decât unul emis în 1930, iar intervalele dintre două clase succesive sunt egale (un an). Pe de altă parte, deși distanțele dintre oricare două cazuri aflate în categorii succesive sunt egale, la acest nivel nu se poate determina măsura exactă (proporția) în care un caz aflat într-o categorie satisface trăsătura măsurată față de un caz aflat în altă clasă. În exemplul nostru, nu suntem îndreptățiți să spunem, de pildă, că un timbru emis în 1990 este de 60 de ori mai recent decât un timbru emis în 1930.

Este important de remarcat că, dacă într-o măsurare de interval apare un punct zero, acesta este doar unul dintre punctele măsurate și nu un *punct zero natural*, adică un punct care să reflecte absența caracteristicii măsurate. *Temperatura* este un exemplu tipic de variabilă măsurabilă la nivel de interval, în care apare un punct zero (0^0 C sau 0^0 F), dar acest punct este doar unul dintre punctele de pe scala de măsură folosită. La acest nivel sunt permise toate operațiile matematice.

1.4.4. Nivelul de raport

În măsurarea la nivel de raport, pe lângă toate trăsăturile unei măsurări de interval, se poate determina măsura exactă (proporția) în care un caz aflat într-o categorie satisface caracteristica măsurată, în raport cu un caz aflat într-o altă categorie, și apare un punct zero natural, ce reflectă absența caracteristicii măsurate. De pildă, înregistrarea vechimii în muncă a angajaților unei firme în ani împliniți produce date de raport, deoarece unitatea de măsură determină intervale egale; suntem îndreptățiți să spunem că un angajat cu 10 ani de vechime în muncă are să zicem o vechime de două ori mai mare decât un angajat cu cinci ani de vechime în muncă și există un punct zero natural (0 ani vechime în muncă). *Venitul, numărul de*

copii şi *numărul de ani de căsnicie* sunt alte exemple de variabile măsurabile la nivel de raport.

Nivelul de măsură al variabilei (variabilelor) de interes reprezintă un criteriu necesar (nu şi suficient) de selecţie a tehnicilor statistice. De pildă, calcularea mediei aritmetice este justificată numai pentru variabilele măsurate la nivelurile de interval şi de raport, deoarece media aritmetică a unei mulţimi de date impune *adunarea* tuturor datelor respective şi *împărţirea* sumei astfel obţinute la numărul total de date.

De notat că în psihologie este uneori dificil să se stabilească dacă o variabilă a fost măsurată la nivel ordinal sau la nivel de interval. Într-un astfel de caz, este util să se presupună că variabila a fost măsurată la nivel de interval, căci acest nivel permite aplicarea unor tehnici statistice mai sofisticate decât cele permise la nivel ordinal. O decizie de acest fel, însă, nu este lipsită de riscuri. În anumite situaţii este nevoie să se dovedească faptul că analiza statistică respectivă este corectă, de pildă prin analize separate ale datelor la ambele niveluri de măsură şi compararea rezultatelor. Dacă rezultatele astfel obţinute sunt substanţial diferite, supoziţia măsurării la nivel de interval trebuie să fie abandonată.

* * *

Stimulaţi de predarea statisticii la Facultatea de Psihologie a Universităţii *Titu Maiorescu*, am conceput această carte ca o introducere clară şi relativ concisă în statistica aplicată în psihologie. Măsura în care am reuşit îndeplinirea acestui obiectiv o va da, firește, cititorul. Pentru aprofundarea unor concepte şi metode statistice prezentate aici, recomandăm cu deosebire următoarele lucrări, din care am preluat multe exemple de analiză statistică: Joseph F. Healey, *Statistics: A Tool for Social Research*, Belmont, California, Wadsworth Publishing Company, 1984; Dennis E. Hinkle, William Wiersma şi Stephen G. Jurs, *Applied Statistics for the Behavioral Sciences*, Boston, Houghton Mifflin Company, 1988; Gerald Keller şi Brian Warrack, *Essentials of Business Statistics*, Belmont, California, Wadsworth Publishing Company, 1991; Leon F. Marzillier, *Elementary Statistics*, Wm. C. Brown Publishers, 1990.

GLOSAR

Date: informații, în principal numerice, care reprezintă anumite caracteristici.

Eșantion: o submulțime strictă a unei populații.

Nivel de măsură: ansamblu de proprietăți matematice ale unei variabile, determinat de procesul prin care variabila a fost măsurată.

Populație: grup ce include toate cazurile de care este interesat cercetătorul.

Statistica: set de metode și tehnici matematice de organizare și prelucrare a datelor, folosite cu scopul de a răspunde la anumite întrebări și de a testa anumite ipoteze.

Statistici descriptive: tehnici statistice utilizate pentru a prezenta, clasifica și însuma scorurile (valorile) unei variabile.

Statistici inferențiale: tehnici statistice utilizate pentru a face generalizări despre o populație pe baza studiului unui eșantion din acea populație sau, altfel spus, pentru a trage concluzii despre caracteristicile unei populații prin caracteristicile corespunzătoare ale unui eșantion din acea populație.

Variabilă: orice trăsătură ce își poate schimba valoarea de la caz la caz.

BCU IAȘI/CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

2. PREZENTAREA DATELOR STATISTICE

Funcția de bază a statisticii descriptive este prezentarea clară și concisă a rezultatelor cercetării. În acest capitol prezentăm o serie de tehnici de organizare și prezentare rezumativă a datelor: procente, proporții, raporturi, rate, distribuții de frecvențe, diagrame și grafice.

2.1. PROCENTE ȘI PROPORȚII

Imaginați-vă că sunteți șeful unui departament al unei mari companii de asigurări și că, dorind să prezentați directorului executiv al companiei o problemă de personal cu care vă confruntați, îi spuneți următoarele: „Oamenii din departamentul meu nu sunt suficient de bine plătiți. Deși din cei 154 de angajați permanenți ai companiei numai 37 sunt în departamentul meu, din cele 17.832 de contracte de asigurare încheiate în companie anul trecut, 7321 au fost aduse de angajații din departamentul pe care îl conduc". Probabil că, după o astfel de prezentare, directorul executiv ar schița o grimasă de plictiseală și ar amâna elegant discuția pentru o dată neprecizată. Întrucât este vorba despre compararea a câte două numere (personalul departamentului față de numărul total de angajați ai companiei și volumul de muncă din departament față de volumul total de muncă din companie pe timp de un an), procentele și proporțiile ar fi fost modalități mai convingătoare de prezentare a informației.

Definițiile matematice ale **proporției** și **procentului** sunt următoarele:

Formula 2.1. *Proporție* $(p) = \frac{f}{n}$

Formula 2.2. *Procent* $(\%) = \frac{f}{n} \cdot 100$

în care f = frecvența sau numărul de cazuri în fiecare categorie;

n = numărul total de cazuri (numărul de cazuri din toate categoriile).

Următorul tabel ilustrează calcularea proporțiilor și procentelor:

Tabelul 2.1. Opinia față de interzicerea fumatului în locurile publice (date fictive)

Opinia	Frecvența (f)	Proporția p	Procentul %
Acord	167	0,621	62,1
Dezacord	72	0,268	26,8
Nu știu/Nu răspund	30	0,111	11,1
TOTAL	269	1,000	100,0

Pentru a afla proporția cazurilor din prima categorie (*de acord cu interzicerea fumatului în locurile publice*), notăm că avem aici 167 de cazuri ($f = 167$) față de 269 de cazuri în eșantion ($n = 269$). Astfel:

$$Proporție\ (p) = \frac{f}{n} = \frac{167}{269} = 0,621$$

Procedând la fel, aflăm proporțiile cazurilor din celelalte categorii. Rezultatele pot fi exprimate sub formă de procente. Astfel, procentul de cazuri din cea de-a treia categorie (*Nu știu/Nu răspund*) este

$$Procent\ (\%) = \frac{f}{n} \cdot 100 = \frac{30}{269} \cdot 100 = 11,1\%$$

Exprimarea rezultatelor prin procente și proporții este cu deosebire utilă atunci când dorim să comparăm grupuri de mărimi diferite. Să presupunem, de pildă, că am adunat următoarele date privind două universități:

Tabelul 2.2. Numărul de studenți înscriși pe specializări la două universități (date fictive)

Specializarea	Universitatea *A*	Universitatea *B*
Drept	103	312
Științe Economice	82	279
Psihologie	137	188
Sociologie	93	217
TOTAL	415	996

Întrucât numărul total de studenți înscriși diferă mult de la o universitate la alta, compararea numărului relativ de studenți înscriși pe specializări la cele două universități este greu de făcut numai pe baza frecvențelor. Care universitate, de pildă, are cel mai mare număr relativ de studenți înscriși la specializarea Psihologie? Pentru a înlesni comparațiile de acest

fel, calculăm procentele de studenți înscriși pe specializări la cele două universități:

Tabelul 2.3. Procentul de studenți înscriși pe specializări la două universități (date fictive)

Specializarea	Universitatea *A* (%)	Universitatea *B* (%)
Drept	24,8	31,3
Științe Economice	19,8	28,0
Psihologie	33,0	18,9
Sociologie	22,4	21,8
TOTAL	100,0 (415)	100,0 (996)

Procentele prezentate în acest tabel permit identificarea atât a diferențelor, cât și a asemănărilor dintre cele două universități. De pildă, Universitatea *A* are un procent mai mare de studenți înscriși la specializarea Psihologie, deși numărul absolut de studenți înscriși la acest profil este mai mic decât la Universitatea *B*, iar la specializarea Sociologie, procentele sunt aproape aceleași.

Remarcați că sub fiecare coloană de procente am menționat totalul în date absolute sau, altfel spus, am menționat dimensiunea eșantionului. În general, dacă nu se menționează baza de comparație, atunci procentele și proporțiile nu ne spun nimic sau chiar ne pot induce în eroare. Să presupunem, de pildă, că o firmă care produce băuturi răcoritoare anunță că ultimul său produs are cu 20% mai puține calorii. Problema este: 20% mai puțin *față de ce*? Fără menționarea bazei de comparație, pretenția firmei respective este lipsită de sens. Unele reclame impresionează prin prezentarea unor proporții, cum ar fi „Două din trei persoane preferă marca *X* de produs mărcii *Y*". Ce ați gândi despre o astfel de reclamă, dacă ați afla că, de fapt, au fost chestionate doar trei persoane? Cunoștințele de statistică își dovedesc utilitatea și în mai buna înțelegere și evaluare a informațiilor „statistice" prezentate în presă sau pe posturile de radio și televiziune.

O eroare care poate să apară în folosirea procentelor constă în încercarea de a aduna procentele ca și cum ar fi numere cardinale. Să presupunem, de pildă, că producătorul național de energie electrică anunță creșterea prețului pe kilowatt cu 50%. Pentru „justificarea" acestei creșteri, producătorul arată că au crescut costurile de producție a energiei electrice,

după cum urmează: prețul combustibilului folosit în termocentrale cu 10%, costurile investițiilor în retehnologizare cu 20% și cheltuielile cu forța de muncă cu 10%, în total, o creștere a costurilor cu 50%. O astfel de justificare este greșită. Doar o creștere cu 50% a *tuturor* costurilor ar justifica o creștere cu 50% a prețului pe kilowatt.

Revenind la exemplul dat la începutul acestei secțiuni, informația prezentată directorului executiv al companiei ar fi fost mai convingătoare dacă i-ați fi spus: „Deși în departamentul meu lucrează doar 24% din angajații companiei, oamenii mei au adus 41% din contractele de asigurare încheiate anul trecut în companie".

2.2. RAPORTURI ȘI RATE

Să considerăm din nou tabelul 2.2. Cât de mulți studenți sunt înscriși la Științe Economice în comparație cu cei înscriși la Psihologie în Universitatea *B*? Putem folosi frecvențele pentru a răspunde la această întrebare, dar un răspuns mai ușor de înțeles poate fi dat folosind un raport. **Raporturile** se calculează împărțind frecvența cazurilor dintr-o categorie la frecvența cazurilor din altă categorie, permițând astfel compararea categoriilor în termeni de *frecvență relativă*. Definiția matematică a raportului este următoarea:

Formula 2.3. $Raport = \frac{f_i}{f_j}$

în care f_i = numărul de cazuri din categoria *i*;
f_j = numărul de cazuri din categoria *j*.

Raportul ne spune exact în ce măsură categoria *i* depășește în număr de cazuri categoria *j*. În exemplul nostru, raportul studenților înscriși la Științe Economice față de cei înscriși la Psihologie în Universitatea *B* este:

$$Raport = \frac{f_i}{f_j} = \frac{279}{188} = 1{,}48.$$

Aceasta înseamnă că pentru fiecare student înscris la Psihologie există 1,48 studenți înscriși la Științe Economice.

Raporturile pot fi multiplicate cu 100 pentru a elimina virgulele. Astfel, raportul calculat mai sus poate fi prezentat ca 148, ceea ce înseamnă că pentru fiecare 100 de studenți înscriși la psihologie există 148 de studenți înscriși la Științe Economice.

Ratele se calculează împărţind numărul de cazuri reale (efective) la numărul de cazuri posibile pentru variabila de interes pe o anumită unitate de timp. De pildă, rata brută a natalităţii pentru o populaţie se calculează împărţind numărul de născuţi vii la numărul total de persoane din acea populaţie pe an, câtul astfel obţinut fiind înmulţit cu 1000. Se spune că rezultatul este exprimat în *promile* ($^0/_{00}$). Dacă, de pildă, într-un oraş cu 7000 de locuitori s-au înregistrat într-un anumit an 100 de născuţi vii, rata brută a natalităţii este

$$\textit{Rata brută a natalităţii } (^0/_{00}) = \frac{100}{7000} \cdot 1000 = 0{,}0143 \cdot 1000 = 14{,}3\ ^0/_{00}.$$

Aceasta înseamnă că pentru fiecare mie de locuitori au fost în acel an 14,3 născuţi vii.

Ca modalităţi de a exprima *frecvenţe relative*, procentele, proporţiile, raporturile şi ratele sunt utile în special atunci când dorim să comparăm diferite grupuri sau/şi diferite intervale de timp.

2.3. DISTRIBUŢII DE FRECVENŢE

O **distribuţie de frecvenţe** este o dispunere a valorilor unei variabile ce arată câte cazuri sunt conţinute în fiecare categorie a variabilei respective. Construirea unei distribuţii de frecvenţe este, de regulă, primul pas în orice analiză statistică. Să presupunem că următoarele date reprezintă scorurile obţinute de 180 de subiecţi la un test de cunoştinţe:

Tabelul 2.3. Scoruri obţinute la un test de cunoştinţe

68	52	69	51	43	36	44	35	54	57	55	56
55	54	54	53	33	48	32	47	47	57	48	56
65	57	64	49	51	56	50	48	53	56	52	55
42	49	41	48	50	24	49	25	53	55	52	56
64	63	63	64	54	45	53	46	50	40	49	41
45	54	44	55	63	55	62	56	50	46	49	47
56	38	55	37	68	46	67	45	65	48	64	49
59	46	58	47	57	58	56	59	60	62	59	63
56	49	55	50	43	45	42	46	53	40	52	41
42	33	41	34	56	32	55	33	40	45	39	46
38	43	37	44	54	56	53	57	57	46	56	45
50	40	49	39	47	55	46	54	39	56	38	55
37	29	36	30	37	49	36	50	36	44	35	45
42	43	41	42	52	47	51	46	63	48	62	49
53	60	52	61	49	55	48	56	38	48	37	47

Datele brute din tabelul 2.3 sunt greu de urmărit şi greu de înţeles. Sub supoziţia că este vorba despre date de interval, putem construi o distribuţie de frecvenţe listând scorurile *diferite* în ordine crescătoare şi înregistrând frecvenţa de apariţie a fiecărui scor. Distribuţia de frecvenţe astfel obţinută este următoarea:

Tabelul 2.4. Distribuţia de frecvenţe a scorurilor obţinute la un test de cunoştinţe

Scorul	*f*	Scorul	3	Scorul	*f*
24	1	40	4	56	14
25	1	41	5	57	6
26	0	42	5	58	2
27	0	43	4	59	3
28	0	44	4	60	2
29	1	45	7	61	1
30	1	46	9	62	3
31	0	47	7	63	5
32	2	48	8	64	4
33	3	49	11	65	2
34	1	50	7	66	0
35	2	51	3	67	1
36	4	52	6	68	2
37	5	53	7	69	1
38	4	54	7		
39	3	55	12		

De notat că această distribuţie de frecvenţe redă şi informaţia conform căreia în eşantionul considerat nu au fost obţinute scorurile 26, 27, 28, 31 şi 66, aflate între cel mai mic scor şi cel mai mare scor.

În distribuţia de frecvenţe din tabelul 2.4 am inclus *toate* scorurile diferite cuprinse între cel mai mic scor şi cel mai mare scor. Cu alte cuvinte, am clasificat datele într-un număr de grupuri sau *clase* egal cu numărul de scoruri. După cum arată şi acest exemplu, construirea unei distribuţii în acest fel are drept rezultat o listă destul de lungă şi nu tocmai clarificatoare. Atunci când numărul de scoruri înregistrate este mare, se optează pentru o prezentare mai compactă (mai puţin detaliată) a datelor, prin gruparea acestora în categorii mai largi, care, în cazul datelor de interval sau de raport, se numesc **intervale de clasă**. În tabelul 2.5 se prezintă o distribuţie de frecvenţe pentru datele din tabelul 2.3, în care apar 10 intervale de clasă.

mărimea fiecărui interval fiind egală cu 5 unități. Adăugând și o coloană de procente pentru scorurile din fiecare categorie față de numărul total de scoruri vom spori claritatea prezentării.

Tabelul 2.5. Distribuția de frecvențe a scorurilor obținute la un test de cunoștințe (mărimea intervalului = 5)

Intervale de clasă	*f*	%
20–24	1	0,56
25–29	2	1,11
30–34	7	3,89
35–39	18	10,00
40–44	22	12,22
45–49	42	23,33
50–54	30	16,67
55–59	37	20,56
60–64	15	8,33
65–69	6	3,33
TOTAL	180	100,0

Distribuția de frecvențe din tabelul 2.4 evidențiază predominanța relativă a scorurilor din intervalele 45–49 (23,33%) și 55–59 (20,56%). Pe de altă parte, gruparea scorurilor în acest tabel conduce la o pierdere de informație față de prezentarea din tabelul 2.3. Nu știm, de pildă, câți subiecți au obținut, respectiv, scorurile 35, 36, 37, 38 și 39, ci doar că sunt 18 scoruri în intervalul 35–39. Apoi, din tabelul 2.4 nu reiese că în eșantionul considerat nu au fost obținute scorurile 26, 27, 28, 31 și 66. Să mai notăm că, la rigoare, se poate spune că în distribuția de frecvențe din tabelul 2.3 mărimea fiecărui interval este egală cu o unitate.

În general, regulile de construire a unei distribuții de frecvențe pentru date de interval sau de raport în care se utilizează intervale de clasă de mărime diferită față de datele inițiale sunt următoarele:

1. Se decide asupra *numărului de intervale de clasă* care vor fi utilizate. Numărul de intervale de clasă nu trebuie să fie atât de mare încât să nu permită sesizarea predominanței relative a anumitor grupări de scoruri, dar nici atât de mic încât să conducă la pierderea unor informații semnificative. De regulă, se utilizează între 5 și 20 de intervale, în funcție de numărul de scoruri din mulțimea inițială de date și de scopurile cercetării.

2. În funcție de numărul de intervale de clasă ales, se stabilește *mărimea intervalelor de clasă*. În mod obișnuit, pentru a se înlesni interpretarea

distribuției de frecvențe, se folosesc intervale de clasă de aceeași mărime. Mărimea unui interval de clasă se stabilește împărțind diferența dintre cel mai mare scor și cel mai mic scor din mulțimea scorurilor date[1] la numărul intervalelor de clasă și rotunjind rezultatul până la un număr întreg convenabil.

3. Se stabilește primul interval astfel încât să conțină cel mai mic scor (limita sa inferioară să fie mai mică sau egală cu cel mai mic scor). Ultimul interval va fi acela care conține cel mai mare scor. Intervalele nu trebuie să se suprapună.

4. Se numără scorurile din fiecare interval de clasă și se înregistrează rezultatele într-o coloană etichetată f („frecvența"). La sfârșitul acestei coloane se prezintă numărul total de scoruri. Pentru mai multă claritate, se poate adăuga o coloană de procente.

Să vedem cum au fost aplicate aceste reguli pentru construirea distribuției de frecvențe din tabelul 2.4. Scorul cel mai mare și scorul cel mai mic fiind, respectiv, 69 și 24, amplitudinea scorurilor este $69 - 24 = 45$. Alegând un număr de 10 intervale de clasă, mărimea fiecărui interval de clasă este $45 \div 10 = 4{,}5 \approx 5$. Primul interval, care trebuie să includă cel mai mic scor, poate fi oricare dintre următoarele:

20–24, 21–25, 22–26, 23–27, 24–28

Fiecare dintre aceste intervale conține cinci scoruri[2], inclusiv scorul 24, deci poate fi ales. În exemplul nostru am ales intervalul 20-24. Ca atare, următorul interval este 25–29 ș.a.m.d. până la ultimul interval, 65–69, care conține cel mai mare scor. De notat că intervalele din tabelul 24 par a nu fi reciproc exclusive. În realitate, lucrurile nu stau așa. Dacă, după intervalul 20–24, ar fi urmat 24–28, 28–32 ș.a.m.d., am fi obținut intervale suprapuse două câte două. Scorul 24, de pildă, ar fi făcut parte atât din intervalul 20–24, cât și din intervalul 24–28. Intervalele de clasă din tabelul 2.4 sunt exhaustive (acoperă toate scorurile din mulțimea inițială de scoruri) și reciproc exclusive (fiecare scor face parte dintr-un singur interval).

Distribuțiile de frecvențe pentru date de interval sau de raport pot conține două instrumente ajutătoare în prezentarea datelor: frecvențe cumulate și procente cumulate. **Frecvențele cumulate** prezintă numărul de

---

[1] Diferența dintre scorul cel mai mare și scorul cel mai mic dintr-o mulțime de scoruri se numește *amplitudine absolută* a mulțimii respective de scoruri. Pentru detalii, vezi capitolul 3.

[2] Aparent, fiecare interval acoperă doar patru scoruri. Pentru a vă convinge că nu este așa, numărați-le!

cazuri dintr-un interval de clasă şi din toate intervalele de clasă precedente, iar **procentele cumulate** prezintă procentul de cazuri dintr-un interval de clasă şi din toate intervalele precedente[3]. Tabelul următor prezintă o coloană de frecvenţe cumulate şi o coloană de procente cumulate pentru distribuţia de frecvenţe din tabelul 2.5.

Tabelul 2.6. Distribuţia de frecvenţe a scorurilor obţinute la un test de cunoştinţe

Intervale de clasă	*f*	*fc*	%	%*c*
20–24	1	1	0,56	0,56
25–29	2	3	1,11	1,67
30–34	7	10	3,89	5,56
35–39	18	28	10,0	15,56
40–44	22	50	12,22	27,78
45–49	42	92	23,33	51,11
50–54	30	122	16,67	67,78
55–59	37	159	20,56	88,34
60–64	15	174	8,33	96,67
65–69	6	180	3,33	100,0
TOTAL	180		100,0	

Pentru a construi distribuţia de frecvenţe cumulate din tabelul 2.6 începem cu primul interval de clasă, 20–24. Pentru acest interval, intrarea în coloana de frecvenţe cumulate este identică cu numărul de scoruri din interval, 1. Pentru intervalul imediat următor, 25–29, se adună numărul de scoruri din interval, 2, cu numărul de scoruri din primul interval, 1, obţinându-se frecvenţa cumulată a intervalului, 3. Se procedează la fel pentru fiecare interval, adunând frecvenţa din intervalul respectiv cu frecvenţa cumulată în intervalul imediat anterior. Evident, frecvenţa cumulată în ultimul interval de clasă este egală cu numărul total de scoruri.

Construirea coloanei de procente cumulate urmează acelaşi model aditiv cu cel folosit pentru frecvenţe cumulate. Astfel, pentru primul interval, intrarea în coloana de procente cumulate este identică cu procentul din interval. Pentru intervalul imediat următor, procentul cumulat este procentul scorurilor din interval plus procentul scorurilor din primul interval ş.a.m.d. până la ultimul interval, în care, evident, procentul cumulat

[3] Considerând, atât pentru frecvenţele cumulate, cât şi pentru procentele cumulate, că intervalele de clasă apar în tabel în ordine crescătoare.

este egal cu 100%. De notat că aceleași rezultate se obțin prin aplicarea formulei 2.2, în care *fc* se înlocuiește cu *f* pentru fiecare interval de clasă, *n* fiind numărul total de scoruri.

Frecvențele și procentele cumulate arată felul în care sunt distribuite cazurile în plaja de scoruri. De pildă, tabelul 2.6 arată că o majoritate semnificativă de subiecți din eșantion – 122, respectiv 67,78% – au obținut scoruri mai mici de 55.

Până acum am considerat scorurile înregistrate la testul de cunoștințe ca fiind date discrete. Măsurarea unei variabile produce *date discrete* dacă înregistrarea acestora se face în categorii reciproc exclusive (nesuprapuse). Pentru anumite scopuri[4], distribuția unei variabile măsurabile la nivel de interval sau de raport trebuie construită ca o serie *continuă* de categorii parțial suprapuse. Pentru a obține o distribuție continuă de scoruri ale unei astfel de variabile, se pornește de la limitele intervalelor de clasă stabilite inițial, numite **limite stabilite**, și, pe baza acestora, se determină așa-numitele **limite reale** sau **exacte**. Pentru determinarea acestor limite, se împarte la doi „distanța" aritmetică dintre intervalele de clasă stabilite inițial, iar rezultatul astfel obținut se scade din fiecare limită inferioară stabilită și se adună la fiecare limită superioară stabilită. Tabelul 2.6 prezintă rezultatele aplicării acestei proceduri la intervalele de clasă stabilite în tabelul 2.4. Întrucât „distanța" aritmetică dintre intervalele de clasă din tabelul 2.4 este de o unitate, limitele reale se află scăzând 0,5 din fiecare limită inferioară și adunând 0,5 la fiecare limită superioară. În tabelul 2.7 este adăugată o coloană etichetată **centre de interval**. Centrele de interval sunt punctele situate exact la mijlocul unui interval și se află împărțind la doi suma limitelor inferioară și superioară ale intervalului[5]. De notat că centrele de interval sunt aceleași, indiferent dacă folosim limite stabilite sau limite reale.

[4] De pildă, cum vom vedea în secțiunea următoare, pentru construirea unei histograme.
[5] Centrele de interval sunt utile în construirea histogramelor.

BCU IASI

Tabelul 2.7. Distribuția de frecvențe a scorurilor obținute la un test de cunoștințe (incluzând limite reale și centre de interval)

Intervale de clasă	Limite reale	Centre de interval	*f*
20–24	19,5–24,5	22	1
25–29	24,5–29,5	27	2
30–34	29,5–34,5	32	7
35–39	34,5–39,5	37	18
40–44	39,5–44,5	42	22
45–49	44,5–49,5	47	42
50–54	49,5–54,5	52	30
55–59	54,5–59,5	57	37
60–64	59,5–64,5	62	15
65–69	64,5–69,5	67	6
TOTAL			180

Se poate observa că intervalele de clasă cu limite reale se suprapun parțial două câte două, astfel încât distribuția apare ca fiind continuă.

Distribuțiile de frecvențe se pot construi și pentru variabile măsurate la nivelurile nominal sau ordinal. Pentru fiecare categorie a variabilei respective se numără cazurile și se prezintă subtotalurile, precum și numărul total de cazuri (*n*). Să presupunem, de pildă, că suntem interesați de măsurarea variabilei *nivel de școlarizare* pentru cei 180 de subiecți care au răspuns la un test de cunoștințe și că decidem să folosim următoarea scală ordinală de măsură: 1. *nu a absolvit nici o școală*; 2. *a absolvit cel mult ciclul obligatoriu de învățământ*; 3. *a absolvit cel mult liceul*; 4. *a absolvit cel mult cursuri postliceale, neuniversitare*; 5. *a absolvit cel mult cursuri universitare*; 6. *a absolvit cursuri postuniversitare*. Folosind numerele de ordine ale categoriilor drept coduri (etichete), tabelul 2.8 ilustrează construirea unei distribuții de frecvențe pentru variabila menționată.

Tabelul 2.8. Nivelul de școlarizare pentru cei 180 de subiecți

Nivel de școlarizare	*f*	%
1	0	0
2	61	33,89
3	82	45,56
4	24	13,33
5	7	3,89
6	6	3,33
TOTAL	180	100,0

Adăugarea unei coloane de procente pentru categorii aduce un spor de claritate a prezentării. De notat că la nivelurile nominal şi ordinal, frecvenţele cumulate şi procentele cumulate sunt lipsite de sens. De asemenea, întrucât la aceste niveluri categoriile sunt întotdeauna discrete, nu are sens să se determine limitele de clasă reale şi centrele de interval. Singura coloană ce poate fi adăugată la distribuţiile de frecvenţe pentru variabile la orice nivel de măsură este coloana de procente.

2.4. DIAGRAME ŞI GRAFICE

Diagramele şi graficele sunt modalităţi de prezentare vizuală a datelor statistice şi furnizează o imagine globală a formei unei distribuţii. Alegerea unei modalităţi sau a alteia depinde, în principal, de nivelul de măsură folosit şi de scopurile cercetării.

Diagrame circulare

O **diagramă circulară** este pur şi simplu un cerc împărţit într-un număr de sectoare egal cu numărul de categorii ale variabilei de interes, mărimea fiecărui sector fiind proporţională cu procentajul de cazuri din categoria respectivă. Diagramele circulare pot fi folosite pentru variabile măsurate la nivelurile nominal şi ordinal.

Să presupunem că am înregistrat statusul marital al celor 180 de subiecţi care au răspuns la un test de cunoştinţe şi că am obţinut următoarele date:

Tabelul 2.9. Statusul marital pentru cei 180 de subiecţi

Status marital	*f*	%
Celibatar*	63	35,0
Căsătorit	90	50,0
Divorţat	27	15,0
TOTAL	180	100,0

*Persoană care nu a fost niciodată căsătorită

Să construim o diagramă circulară pentru datele din acest tabel. Întrucât circumferinţa unui cerc are 360^0, vom aloca 126^0 (35% din 360^0) pentru prima categorie, 180^0 (50% din 360^0) pentru cea de-a doua categorie şi 54^0 (15 % din 360^0) pentru cea de-a treia categorie. Obţinem următoarea diagramă circulară:

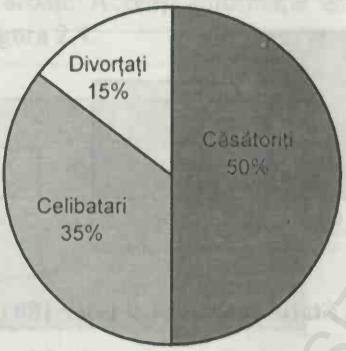


Figura 2.1. Statusul marital al celor 180 de subiecţi

Diagrama din figura 2.1 evidenţiază vizual preponderenţa relativă a subiecţilor căsătoriţi şi lipsa relativă a subiecţilor divorţaţi din eşantionul considerat.

Diagrame cu coloane şi diagrame cu linii

Diagramele cu coloane reprezintă o altă modalitate de prezentare vizuală a datelor statistice. Ca şi diagramele circulare, diagramele cu coloane pot fi folosite pentru variabile măsurate la nivelurile nominal şi ordinal. Într-o astfel de diagramă, categoriile variabilei de interes apar pe o axă orizontală (axa absciselor), iar frecvenţele (relative) apar pe axa verticală corespunzătoare (axa ordonatelor). Pe axa orizontală se construiesc atâtea coloane (dreptunghiuri) cu baze egale câte categorii sunt de prezentat. Înălţimea unei coloane este proporţională cu frecvenţa (relativă) a cazurilor din categoria respectivă. Întrucât la nivelurile nominal şi ordinal categoriile variabilelor sunt discrete, coloanele sunt separate între ele de o distanţă egală, de regulă, cu ½ din lăţimea lor.

Diagrama cu coloane din figura 2.2 prezintă în procente faţă de total statusul marital al subiecţilor din tabelul 2.9.

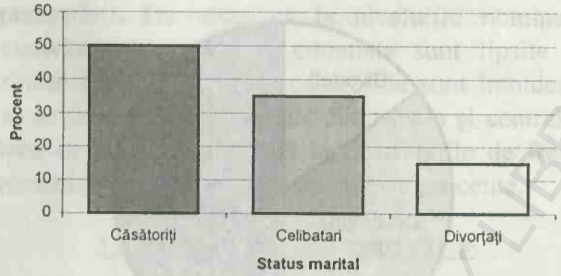


Figura 2.2. Statusul marital al celor 180 de subiecţi

Decizia de a utiliza o diagramă circulară sau o diagramă cu coloane depinde de numărul de categorii ale variabilei de interes şi de scopul cercetării. Dacă o variabilă are mai mult de şase sau şapte categorii, atunci este preferabilă o diagramă cu coloane, căci o diagramă circulară cu prea multe categorii devine prea aglomerată, deci greu de citit.

Diagramele cu coloane sunt utile în special pentru a prezenta frecvenţele (relative) pentru două sau mai multe categorii ale unei variabile, cu scopul de a face unele comparaţii. Să presupunem, de pildă, că dorim să facem o comparaţie pe sexe a numărului de angajaţi ai unei firme care, în primele şase luni ale unui an, au apelat la serviciile centrului de consiliere psihologică al firmei. Figura 2.3. prezintă datele (fictive) obţinute.

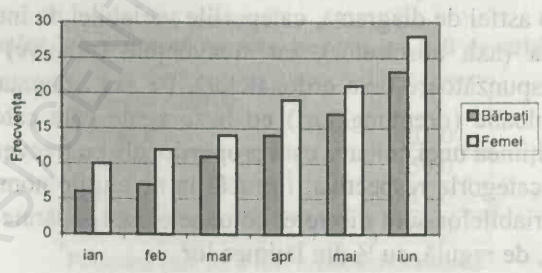


Figura 2.3. Numărul de angajaţi care au apelat la serviciile centrului de consiliere psihologică

Această diagramă arată că, în timp ce numărul de angajaţi care au apelat la serviciile centrului de consiliere psihologică în perioada menţio-

nată a fost în creştere, numărul de apelanţi femei a crescut mai repede decât numărul de apelanţi bărbaţi. Aceeaşi informaţie este prezentată printr-o diagramă cu linii în figura 2.4.

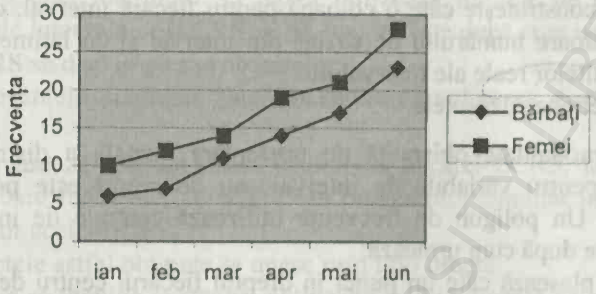


Figura 2.4. Numărul de angajaţi care au apelat la serviciile centrului de consiliere psihologică

Ca şi diagramele circulare şi diagramele cu coloane, diagramele cu linii, îndeobşte cunoscute sub denumirea de „grafice", sunt larg folosite în mass-media pentru prezentarea diferitelor date statistice.

Histograme şi poligoane de frecvenţe

Histogramele sunt modalităţi de prezentare vizuală a distribuţiilor de frecvenţe pentru date de interval sau de raport, asemănătoare diagramelor cu coloane. Întrucât într-o histogramă se folosesc limitele de clasă reale ale intervalelor considerate, coloanele apar în contact două câte două. Figura 2.5 prezintă o histogramă pentru datele din tabelul 2.7.

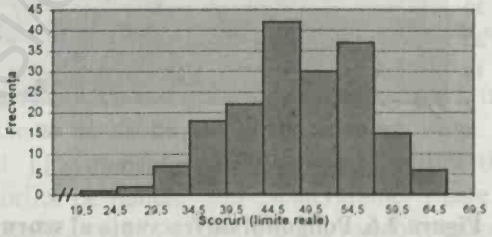


Figura 2.5. Histograma scorurilor obţinute la un test de cunoştinţe

În general, o histogramă se construieşte după cum urmează:

1. Intervalele de clasă sau scorurile se dispun pe axa orizontală (axa absciselor), utilizând limite de clasă reale.

2. Frecvenţele se dispun pe axa verticală (axa ordonatelor).

3. Se construieşte câte o coloană pentru fiecare interval, cu înălţimea corespunzătoare numărului de cazuri din interval şi cu lăţimea corespunzătoare limitelor reale ale intervalului.

4. Se etichetează axele.

Altă modalitate obişnuită de prezentare vizuală a distribuţiilor de frecvenţe pentru variabile de interval sau de raport este **poligonul de frecvenţe**. Un poligon de frecvenţe utilizează centrele de interval şi se construieşte după cum urmează:

1. Se plasează câte un punct în dreptul fiecărui centru de interval, la înălţimea corespunzătoare frecvenţei din intervalul respectiv.

2. Punctele astfel obţinute se unesc prin linii drepte.

3. Se închide poligonul, considerându-se câte un interval suplimentar cu frecvenţa zero la fiecare capăt al distribuţiei şi unind prin linii drepte punctele extreme cu centrele de interval (aflate pe abscisă) ale intervalelor suplimentare.

4. Se etichetează axele.

Pentru simplificarea construcţiei, pe axa absciselor se pot marca direct centrele de interval, în locul limitelor de clasă. Deşi redau aceeaşi informaţie ca şi histogramele, poligoanele de frecvenţe sunt utile pentru a da o imagine generală a unei distribuţii de frecvenţe.

Figura următoare prezintă un poligon de frecvenţe ce redă aceeaşi informaţie ca şi histograma din figura precedentă.

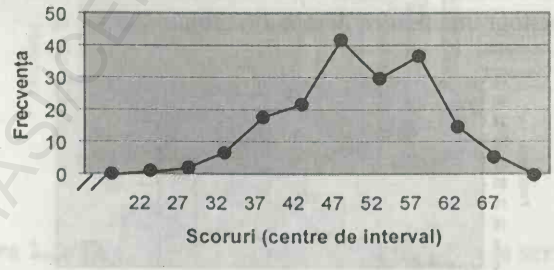


Figura 2.6. Poligonul de frecvenţe al scorurilor obţinute la un test de cunoştinţe

Ogive

Ogivele, numite şi „curbe cumulative ale frecvenţelor" sau „poligoane de frecvenţe cumulate", prezintă vizual frecvenţele cumulate sau procentele cumulate ale unei distribuţii. O ogivă utilizează limitele de clasă reale superioare ale intervalelor (LCRS) şi se construieşte după cum urmează:

1. LCRS se dispun pe axa absciselor.
2. Frecvenţele cumulate sau procentele cumulate se dispun pe axa ordonatelor.
3. Se plasează câte un punct în dreptul fiecărei LCRS, la înălţimea corespunzătoare frecvenţei cumulate sau procentului cumulat în intervalul corespunzător acelei LCRS.
4. Punctele astfel obţinute se unesc prin linii drepte.
5. Ogiva se închide la stânga, extinzând o linie dreaptă către limita de clasă reală inferioară a primului interval.
6. Se etichetează axele.

Figura 2.7 prezintă o ogivă pentru datele din tabelul 2.6.

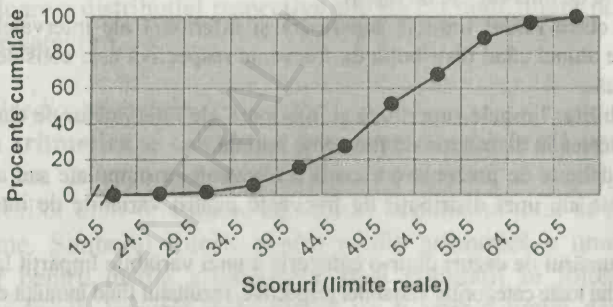


Figura 2.7. Ogivă pentru scorurile obţinute la un test de cunoştinţe

După cum vom vedea în capitolul 3, o ogivă poate fi utilizată pentru a afla diferite puncte de interes într-o distribuţie de frecvenţe.

În capitolul 11 vom folosi **diagrame de împrăştiere**, numite şi „diagrame ale norilor de puncte" sau „scatergrame"[6], care sunt modalităţi de prezentare vizuală a corelaţiei dintre două variabile măsurate la nivel de interval sau de raport.

---

[6] De la substantivul din limba engleză „scatter", care înseamnă *împrăştiere*.

GLOSAR

Centre de interval: puncte situate exact la mijlocul unui interval de clasă.

Diagramă circulară: cerc împărţit într-un număr de sectoare egal cu numărul de categorii ale variabilei de interes, mărimea fiecărui sector fiind proporţională cu procentul de cazuri din categoria respectivă.

Diagramă cu coloane: modalitate de prezentare vizuală a distribuţiei unei variabile, în care categoriile sunt reprezentate prin coloane cu baza egală, înălţimea fiecărei coloane fiind proporţională cu procentul de cazuri din categoria respectivă.

Distribuţie de frecvenţe: dispunere a valorilor unei variabile, care arată câte cazuri sunt conţinute în fiecare categorie a variabilei respective.

Frecvenţă cumulată: numărul de cazuri dintr-un interval de clasă şi din toate intervalele precedente.

Histogramă: modalitate de prezentare vizuală a distribuţiilor de frecvenţe pentru variabile de interval sau de raport, în care categoriile sunt reprezentate prin coloane continue cu baza egală cu limitele reale ale intervalelor de clasă respective, înălţimea fiecărei coloane fiind proporţională cu procentul de cazuri din interval.

Intervale de clasă: categorii utilizate în cazul distribuţiilor de frecvenţe pentru variabile de interval sau de raport.

Limite de clasă reale: limitele superioară şi inferioară ale intervalelor de clasă, folosite atunci când distribuţia de frecvenţe respectivă este considerată ca fiind continuă.

Limite stabilite: limitele superioară şi inferioară ale intervalelor de clasă, aşa cum apar acestea în distribuţia de frecvenţe iniţială.

Ogivă: modalitate de prezentare vizuală a frecvenţelor cumulate sau a procentelor cumulate ale unei distribuţii de frecvenţe pentru variabile de interval sau de raport.

Procent: numărul de cazuri dintr-o categorie a unei variabile împărţit la numărul de cazuri din toate categoriile variabilei respective, rezultatul fiind înmulţit cu 100.

Procent cumulat: procentul de cazuri dintr-un interval de clasă şi din toate intervalele precedente.

Proporţie: numărul de cazuri dintr-o categorie a unei variabile împărţit la numărul de cazuri din toate categoriile variabilei respective.

Raport: numărul de cazuri dintr-o categorie a unei variabile împărţit la numărul de cazuri din altă categorie a variabilei respective.

Rată: numărul de cazuri reale (efective) împărţit la numărul de cazuri posibile pentru variabila de interes pe o anumită unitate de timp.

3. MĂRIMILE TENDINȚEI CENTRALE ȘI ALE DISPERSIEI

Utilizarea distribuțiilor de frecvențe și a tehnicilor grafice de prezentare a acestora permite relevarea formelor globale ale distribuțiilor unor scoruri. Pentru descrierea mai detaliată a unei distribuții de scoruri, statisticienii folosesc două tipuri de mărimi numerice descriptive. Este vorba despre ideea de caz tipic sau central într-o distribuție, redată prin **mărimile tendinței centrale**, și despre ideea de varietate sau eterogenitate a unei distribuții, redată prin **mărimile dispersiei**. Determinarea acestor mărimi furnizează valori precise ce pot fi ușor interpretate și comparate între ele.

3.1. MĂRIMILE TENDINȚEI CENTRALE

Mărimile folosite în mod obișnuit pentru măsurarea tendinței centrale sunt modul, mediana și media aritmetică. Fiecare dintre aceste mărimi rezumă o întreagă distribuție de scoruri, descriind cea mai tipică sau centrală valoare a distribuției respective sub forma unui singur număr sau a unei singure categorii.

3.1.1. Media aritmetică

Media aritmetică se calculează doar pentru variabile măsurate la nivel de interval sau de raport și se definește ca rezultat al împărțirii sumei tuturor scorurilor dintr-o mulțime de scoruri la numărul total de scoruri din acea mulțime. Simbolul folosit pentru media aritmetică a unui eșantion este $\overline{X}$, iar pentru media aritmetică a unei populații se folosește litera grecească μ (*miu*). Întrucât deocamdată va fi vorba numai despre eșantioane, vom folosi simbolul $\overline{X}$. Formula matematică a mediei aritmetice este următoarea:

Formula 3.1. $\overline{X} = \dfrac{\sum X_i}{n}$

în care $\sum X_i$ = suma scorurilor;

n = numărul total de scoruri. Să presupunem, de pildă, că am înregistrat vârstele pentru un eșantion de 11 persoane și că am obținut următoarea distribuție de frecvențe:

Tabelul 3.1. Vârstele pentru un eşantion de 11 persoane

Vârsta	*f*
16	1
17	4
18	1
19	2
23	3
TOTAL	11

Să remarcăm că avem 11 scoruri, câte unul pentru fiecare persoană din eşantion. Pentru a afla media aritmetică a vârstelor persoanelor din eşantion sau, pe scurt, vârsta medie, trebuie să însumăm *toate* cele 11 scoruri şi să împărţim rezultatul obţinut la 11. Pentru a scurta procedura, înmulţim fiecare scor cu frecvenţa cu care apare, adunăm rezultatele înmulţirilor şi împărţim suma astfel obţinută la 11:

$$\overline{X} = \frac{\sum X_i}{n} = \frac{(1 \cdot 16) + (4 \cdot 17) + (1 \cdot 18) + (2 \cdot 19) + (3 \cdot 23)}{11} = \frac{209}{11} = 19$$

Astfel, media aritmetică a vârstelor persoanelor din eşantionul considerat este 19.

Media aritmetică este mărimea statistică folosită cel mai des în aprecierea tendinţei centrale a unei mulţimi de scoruri de interval sau de raport deoarece, pe de o parte, este uşor de calculat şi, pe de altă parte, are următoarele proprietăţi importante, pe care le vom folosi în unele aplicaţii ulterioare:

1. Pentru orice distribuţie de scoruri, suma abaterilor scorurilor de la media lor aritmetică este egală cu zero. **Abaterea** unui scor X_i faţă de media aritmetică $\overline{X}$ este diferenţa $X_i - \overline{X}$, astfel că această proprietate se exprimă simbolic după cum urmează:

$$\sum (X_i - \overline{X}) = 0$$

În cuvinte, suma diferenţelor dintre scoruri şi media lor aritmetică este egală cu 0. Această proprietate, care este folosită în obţinerea unor formule statistice mai complicate, poate fi exprimată şi spunând că, pentru orice distribuţie de scoruri, media aritmetică este punctul în jurul căruia toate scorurile se anulează, ceea ce face din media aritmetică o mărime descriptivă adecvată în măsurarea centralităţii scorurilor.

2. Pentru orice distribuție de scoruri, suma pătratelor abaterilor scorurilor față de media lor aritmetică este mai mică decât suma pătratelor abaterilor scorurilor față de oricare alt scor din distribuție, în simboluri:

$$\sum(X_i - \overline{X})^2 < \sum(X_i - X_j)^2$$

În cuvinte, suma pătratelor diferențelor dintre scoruri și media lor aritmetică este mai mică decât suma pătratelor diferențelor dintre scoruri și oricare alt scor din distribuție. Această proprietate, care este folosită pentru a defini unele mărimi ale dispersiei și pentru a calcula unele mărimi ale corelației[1], poate fi exprimată și spunând că media aritmetică este punctul în jurul căruia suma abaterilor pătratice ale scorurilor este minimă.

Tabelul 3.2. ilustrează cele două proprietăți ale mediei aritmetice pentru distribuția de scoruri din tabelul 3.1, în care $\overline{X} = 19$.

Tabelul 3.2. Proprietăți ale mediei aritmetice pentru datele din tabelul 3.1.

X_i	$X_i - X$	$(X_i - X)^2$	$(X_i - 17)$	$(X_i - 17)^2$
16	–3	9	–1	1
17	–2	4	0	0
17	–2	4	0	0
17	–2	4	0	0
17	–2	4	0	0
18	–1	1	1	1
19	0	0	2	4
19	0	0	2	4
23	4	16	6	36
23	4	16	6	36
23	4	16	6	36
Σ	0	74		118

Se poate constata că suma abaterilor pătratice ale scorurilor față de media aritmetică (74) este mai mică decât suma abaterilor pătratice ale scorurilor față de scorul 17 (118). Această relație are loc pentru oricare alt scor din distribuție.

Este important de reținut că, în cazul în care o distribuție are foarte puține scoruri extreme (foarte mari sau foarte mici), media aritmetică poate deveni o mărime înșelătoare în aprecierea centralității. De pildă, mulțimea de scoruri 15, 20, 25, 30, 35 are media aritmetică 25, în timp ce media aritmetică a mulțimii 15, 20, 25, 30, 3500 este 718, iar media aritmetică a

[1] Vezi capitolul 11.

mulțimii 1, 15, 20, 25, 30, este 18,2. Se poate constata că media aritmetică este afectată disproporționat de prezența scorurilor 3500 și, respectiv, 1. Media aritmetică este „trasă" întotdeauna în direcția scorurilor extreme, mai ales în direcția celor foarte mari. Acesta este un motiv pentru care se recurge uneori la o altă mărime a tendinței centrale: mediana.

3.1.2. Mediana

Mediana poate fi determinată atât pentru variabile măsurate la nivel de interval sau de raport, cât și pentru variabile măsurate la nivel ordinal. Ca și în cazul mediei aritmetice, și în cazul medianei vom folosi două simboluri: $\tilde{X}$ pentru mediana unui eșantion și $\tilde{\mu}$ pentru mediana unei populații. De asemenea, întrucât deocamdată va fi vorba numai despre eșantioane, vom folosi simbolul $\tilde{X}$.

Mediana $\tilde{X}$ a unei mulțimi de scoruri este „punctul de mijloc" al acelei mulțimi, în sensul că numărul de cazuri cu scoruri mai mici sau egale cu $\tilde{X}$ este egal cu numărul de cazuri cu scoruri mai mari sau egale cu $\tilde{X}$. Pentru a afla mediana unei mulțimi de n scoruri, scorurile respective se aranjează mai întâi în ordine crescătoare sau descrescătoare. Dacă n este impar, atunci mediana este, evident, scorul cazului de mijloc. Dacă n este par, atunci vor fi două cazuri de mijloc și orice valoare cuprinsă între cele două scoruri ale cazurilor de mijloc satisface definiția medianei. Într-o astfel de situație, prin convenție, se ia drept mediană media aritmetică a celor două scoruri ale cazurilor de mijloc, evident, cu condiția ca scorurile să fie de interval sau de raport.

În exemplul din tabelul 3.1 avem de-a face cu 11 cazuri. Vârsta mediană este 18, deoarece avem în eșantion cinci persoane cu vârste mai mici de 18 ani și cinci persoane cu vârste mai mari de 18 ani. Să presupunem acum că am înregistrat vârstele pentru un eșantion de 7 persoane și că am obținut următoarea distribuție de frecvențe:

Tabelul 3.3. Vârstele pentru un eșantion de 7 persoane

Vârsta	*f*
26	2
28	1
29	1
30	1
32	1
60	1
TOTAL	7

Pentru datele din acest tabel, $\tilde{X} = 29$: trei persoane au vârste mai mici de 29 de ani şi alte trei persoane au vârste mai mari de 29 de ani. De remarcat că vârsta tipică a persoanelor din acest eşantion este mai bine reprezentată de vârsta mediană decât de media aritmetică a vârstelor, 33, care este „trasă" în sus de scorul 60. Acum, dacă adăugăm la acest eşantion o persoană de 31 de ani, avem 8 cazuri cu scorurile 26, 26, 28, 29, 30, 31, 32 şi 60. Astfel, apar două cazuri de mijloc, unul cu scorul 29 şi celălalt cu scorul 30, şi orice număr cuprins între aceste două scoruri satisface definiţia medianei. Ca atare, mediana este media aritmetică a scorurilor celor două cazuri de mijloc: 29,5.

Următoarele două exemple arată de ce este inclusă expresia „sau egale" în definiţia medianei. Să presupunem că am înregistrat numărul de copii pentru un eşantion de 16 familii, rezultatele obţinute fiind următoarele:

Tabelul 3.4. Numărul de copii pentru un eşantion de 16 familii

Număr de copii	*f*
0	3
1	4
2	7
3	2
TOTAL	16

În eşantionul considerat în tabelul 3.4, 8 familii au 0,1 sau 2 copii, iar celelalte 8 familii au câte 2 sau 3 copii, astfel încât cea de-a 8-a şi cea de-a 9-a familie (cele două cazuri de mijloc) au acelaşi număr de copii: 2. Ca atare, mediana aceste mulţimi de scoruri este 2: 8 familii au fiecare un număr de copii mai mic sau egal cu 2, iar celelalte 8 familii au fiecare un număr de copii mai mare sau egal cu 2. Tot aşa, în mulţimea impară de scoruri

1, 2, 3, 5, 5, 5, 7, 10, 12

scorul median este 5, deoarece avem patru scoruri mai mici sau egale cu 5 (1, 2, 3, 5) şi patru scoruri mai mari sau egale cu 5 (5, 7, 10, 12).

Următorul exemplu ilustrează determinarea medianei pentru variabile de nivel ordinal. Să presupunem că într-o cercetare privind modul de petrecere a timpului liber, 11 subiecţi au fost solicitaţi să răspundă la

întrebarea „Cât de des ați fost la cinematograf în ultimele șase luni?" Răspunsurile la această întrebare au fost înregistrate pe o scală ordinală cu următoarele categorii: 1. *Deloc*, 2. *Foarte rar*, 3. *Rar*, 4. *Des*, 5. *Foarte des*. Aranjând scorurile în ordine descrescătoare, datele sunt următoarele:

Tabelul 3.5. „Cât de des mergeți la cinematograf?"

Subiectul	Răspunsul
A	*Foarte des*
B	*Foarte des*
C	*Foarte des*
D	*Foarte des*
E	*Foarte des*
F	*Des*
G	*Foarte rar*
H	*Foarte rar*
I	*Foarte rar*
J	*Foarte rar*
K	*Deloc*

Având un total de 11 cazuri, cazul de mijloc este al 6-lea, *F*, astfel încât răspunsul median este scorul celui de-al șaselea caz: *Des*. Dacă adăugăm un subiect care dă răspunsul *Deloc*, avem două cazuri de mijloc: cel de-al 6-lea, *F*, și cel de-al 7-lea, *G*. În această situație, teoretic vorbind, orice răspuns între *Des* și *Foarte rar* satisface definiția medianei. Practic, pe scala menționată, între *Des* și *Foarte rar* avem răspunsul *Rar*, pe care îl vom considera drept răspuns median: 6 subiecți merg la cinematograf foarte des sau des, iar ceilalți șase subiecți merg la cinematograf foarte rar sau deloc.

Dacă numărul de cazuri din eșantion este relativ mic, identificarea cazului sau cazurilor de mijloc este neproblematică. Pentru eșantioane mari, identificarea menționată poate fi înlesnită prin folosirea unor calcule simple. Astfel, după ordonarea scorurilor, dacă n este impar, cazul de mijloc este dat de formula $(n+1)/2$; dacă n este par, primul caz de mijloc este dat de formula $n/2$, iar cel de-al doilea caz de mijloc de formula $(n/2)+1$. Ca exercițiu, determinați mediana scorurilor din tabelul 2.3 din capitolul anterior. (Puteți folosi tabelul 2.4? Dacă da, cum?)

De notat că mediana nu este „trasă" în direcția valorilor extreme, deoarece această mărime ia în considerare doar ordinea scorurilor, nu și magnitudinea efectivă a acestora[2]. Reluând un exemplu dat mai sus, mulțimea de scoruri 15, 20, 25, 30, 35 are aceeași mediană ca și mulțimea 15, 20, 25, 30, 3500: scorul 25. Să mai remarcăm că mediana și media aritmetică ale unei mulțimi de scoruri pot să coincidă, acesta fiind, de pildă, cazul mulțimii 15, 20, 25, 30, 35.

Mediana nu poate fi determinată pentru variabile de nivel nominal, deoarece aceste variabile nu au scoruri care să poată fi ordonate. Mărimea tendinței centrale care poate fi folosită la nivel nominal, ca și la toate celelalte niveluri de măsură, este modul.

3.1.3. Modul

Modul unei mulțimi de scoruri (*Mo*) este scorul care apare cel mai frecvent în acea mulțime. De pildă, modul datelor din tabelul 3.4 este 2, deoarece este scorul care apare de cele mai multe ori în eșantionul considerat, iar modul datelor din tabelul 3.5 sau, altfel spus, răspunsul modal, este *Foarte des*, deoarece este răspunsul care apare de cele mai multe ori în raport cu celelalte răspunsuri.

Modul este singura mărime care poate fi folosită în măsurarea tendinței centrale pentru variabile de nivel nominal. Modul unei astfel de variabile este cea mai mare categorie a sa sau, altfel spus, categoria cu cele mai multe cazuri. De pildă, modul variabilei *status marital* pentru distribuția din tabelul 2.8 din capitolul anterior este categoria *Căsătorit*.

Exemplele date până acum ilustrează cazul mulțimilor *unimodale* de scoruri, adică al mulțimilor în care există un singur scor care apare mai frecvent decât celelalte. Dacă într-o mulțime de scoruri există două astfel de scoruri, ca în exemplul

3, 3, 3, 5, 5, 5, 7, 10, 12,

atunci se spune că mulțimea respectivă este *bimodală*. Desigur, este posibil ca o mulțime de scoruri să aibă trei sau mai multe moduri, după cum este posibil ca o mulțime de scoruri să nu aibă mod, fiecare scor din mulțimea respectivă apărând de un număr egal de ori. Pe de altă parte, este posibil ca o mulțime unimodală să nu aibă modul localizat „la mijloc". Fie, de pildă, următoarea mulțime de scoruri:

---

[2] Acesta este și motivul pentru care mediana se folosește cu precădere pentru date ordinale.

44, 44, 46, 46, 46, 48, 50, 50, 50, 50, 50.

Modul acestei mulțimi este 50, în timp ce mediana este 48, iar media aritmetică este aproximativ 47,6. Pretenția că modul este o mărime a tendinței centrale trebuie să fie înțeleasă în sensul că această mărime indică localizarea celei mai mari grupări sau concentrări de scoruri dintr-o mulțime unimodală, ceea ce se poate dovedi important în special pentru date de nivel nominal. Să presupunem că ultima mulțime de scoruri de mai sus reprezintă o înregistrare a măsurilor sacourilor vândute într-un magazin timp de o săptămână. Astfel, modul măsurilor de sacouri vândute sau, altfel spus, măsura modală a acestora este de mai mare interes pentru directorul magazinului decât mediana măsurilor de sacouri vândute. Pe de altă parte, în acest caz media aritmetică a scorurilor nu este în nici un fel semnificativă: numerele care indică măsuri de sacouri sunt convenționale, astfel că ele puteau fi înlocuite, de pildă, cu litere.

3.1.4. Distribuții simetrice și distribuții asimetrice

După cum am arătat, dacă lucrăm cu date nominale, singura mărime a tendinței centrale pe care o putem folosi este modul; dacă datele sunt ordinale, putem folosi atât modul, cât și mediana, iar dacă datele sunt de interval sau de raport, putem folosi toate cele trei mărimi ale tendinței centrale.

După cum vom vedea în capitolele dedicate statisticii inferențiale, la nivel de interval sau de raport media aritmetică este cu deosebire utilă pentru a trage concluzii despre caracteristicile unei populații pe baza caracteristicilor corespunzătoare ale unui eșantion din acea populație. Pentru scopuri descriptive însă, dacă lucrăm cu date de interval sau de raport, este recomandabil să folosim toate mărimile tendinței centrale, deoarece, pe de o parte, ele pot furniza informații relativ diferite și, pe de altă parte, compararea valorilor mediei aritmetice și medianei furnizează informații despre forma unei distribuții. Astfel, media aritmetică și mediana au aceeași valoare numai atunci când distribuția este **simetrică**. Într-un astfel de caz, dacă distribuția este unimodală, atunci și modul are aceeași valoare cu celelalte două mărimi. Să considerăm următorul poligon de frecvențe „rotunjit", care prezintă o distribuție de frecvențe simetrică:

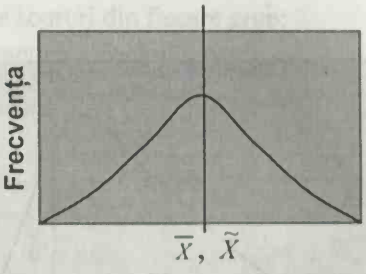


Figura 3.1. O distribuție simetrică ($\overline{X} = \tilde{X}$)

În această distribuție, media aritmetică, mediana şi modul apar împreună în cel mai înalt punct al curbei. Acest punct este *modul*, deoarece este punctul în care sunt înregistrate cele mai multe cazuri, este *mediana*, deoarece numărul de cazuri înregistrate la stânga acestui punct este egal cu numărul de cazuri înregistrat la dreapta sa şi este *media aritmetică*, deoarece scorurile aflate în partea dreaptă întrec scorul median în aceeaşi măsură în care scorurile aflate în partea stângă sunt mai mici decât scorul median.

Atunci când o distribuție are doar câteva scoruri foarte mari sau, altfel spus, scorurile relativ mici sunt predominante, media aritmetică este mai mare decât mediana. Într-un astfel de caz, se spune că distribuția respectivă prezintă o **asimetrie pozitivă**. Figura 3.2 ilustrează cazul unei distribuții cu asimetrie pozitivă:

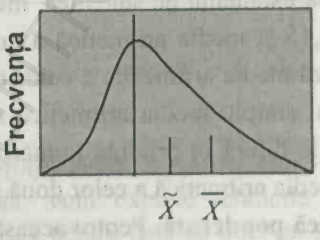


Figura 3.2. O distribuție cu asimetrie pozitivă ($\overline{X} > \tilde{X}$)

Atunci când o distribuție are doar câteva scoruri foarte mici sau, altfel spus, scorurile relativ mari sunt predominante, media aritmetică este mai mică decât mediana. Într-un astfel de caz, se spune că distribuția respectivă prezintă o **asimetrie negativă**. Figura 3.3 ilustrează cazul unei distribuții cu asimetrie negativă.

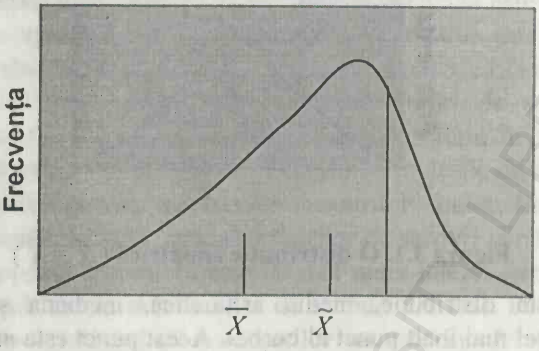


Figura 3.3. O distribuție cu asimetrie negativă ($\overline{X} < \tilde{X}$)

După cum se poate constata, compararea mediei aritmetice cu mediana ne indică imediat dacă distribuția respectivă este sau nu simetrică și dacă nu, ne indică sensul asimetriei.

3.1.5. Media aritmetică ponderată

Să presupunem că într-o serie de 140 de studenți sunt 86 de băieți și 54 de fete. Știm că la examenul de statistică, media aritmetică a notelor obținute de fete este 8,45 și media aritmetică a notelor obținute de băieți este 7,33. Ne interesează media aritmetică a celor două grupuri combinate. Dacă am calcula pur și simplu media aritmetică a celor două medii, am greși, deoarece grupurile diferă în privința numărului de studenți, deci de scoruri. Pentru a afla media aritmetică a celor două grupuri combinate, vom calcula **media aritmetică ponderată**. Pentru aceasta, înmulțim numărul de scoruri din fiecare grup cu media aritmetică a grupului respectiv, adunăm produsele astfel obținute, iar rezultatul îl împărțim la numărul total de scoruri. În simboluri:

Formula 3.2. $\overline{X} = \frac{\sum n_i \overline{X}_i}{N}$

în care n_i = numărul de scoruri din fiecare grup;

$\overline{X}_i$ = media aritmetică a fiecărui grup;

N = numărul total de scoruri.

În exemplul nostru avem:

$$\overline{X} = \frac{\sum n_i \overline{X}_i}{N} = \frac{(86 \cdot 7{,}33) + (54 \cdot 8{,}45)}{140} = \frac{1086{,}68}{140} = 7{,}76$$

Dacă am fi făcut media aritmetică a valorilor 7,33 şi 8,45 am fi obţinut 7,89, ceea ce ar fi fost incorect, căci grupurile diferă în privinţa numărului de scoruri. Evident, media aritmetică ponderată poate fi calculată şi pentru mai mult de două grupuri.

Este important de remarcat că, aplicate la aceeaşi mulţime de scoruri, formulele 3.1 şi 3.2 produc acelaşi rezultat. Pentru ilustrare, fie următoarea mulţime de 10 scoruri, împărţită în două grupuri: $n_1 = \{5, 5, 5, 6, 7, 7\}$, $n_2 = \{7, 8, 9, 10\}$. Media aritmetică pentru întreaga mulţime este

$$\overline{X} = \frac{\sum X_i}{n} = \frac{(5 \cdot 3) + 6 + (7 \cdot 3) + 8 + 9 + 10}{10} = \frac{69}{10} = 6{,}90$$

Acum, mediile aritmetice ale celor două grupuri sunt, respectiv, $\overline{X}_1 = 5{,}83$ şi $\overline{X}_2 = 8{,}50$, astfel că media aritmetică ponderată a celor două grupuri este

$$\overline{X} = \frac{\sum n_i \overline{X}_i}{N} = \frac{(6 \cdot 5{,}83) + (4 \cdot 8{,}50)}{10} = \frac{35 + 34}{10} = \frac{69}{10} = 6{,}90$$

Încă o dată, calculul mediei aritmetice a celor două medii conduce la un rezultat greşit: 7,16.

3.1.6. Mărimile tendinţei centrale pentru date grupate

În cele ce urmează, vom expune tehnicile statistice de aflare a mărimilor tendinţei centrale pentru date de interval sau de raport grupate în distribuţii de frecvenţe. Aceste tehnici îşi dovedesc utilitatea în două situaţii. O primă situaţie apare atunci când trebuie să lucrăm cu o mulţime mare de scoruri brute şi nu dispunem de un calculator sau de un computer sau decidem că valorile aproximative ale acestor mărimi sunt suficiente pentru scopurile noastre. O a doua situaţie apare atunci când avem de-a face cu date din surse secundare, deja organizate în distribuţii de frecvenţe cu intervale de clasă, fără să avem acces la scorurile brute iniţiale. Într-o astfel de situaţie, întrucât nu cunoaştem modul în care scorurile sunt realmente

distribuite, nu putem decât să aproximăm mărimile tendinței centrale ale distribuțiilor respective.

Pentru ilustrare, să considerăm exemplul privind scorurile obținute de 180 de subiecți la un test de cunoștințe, pe care am lucrat în capitolul anterior. Înainte de a trece mai departe, prezentăm valorile calculate pentru scorurile brute, pentru a le putea compara cu cele calculate pentru datele grupate. Astfel, în exemplul nostru avem:

$$\bar{X} = 49{,}22 \quad \tilde{X} = 49 \quad Mo = 56$$

Să considerăm acum distribuția de frecvențe a scorurilor obținute de 180 de subiecți la un teste de cunoștințe:

Tabelul 3.6. Distribuția de frecvențe a scorurilor obținute la un test de cunoștințe

Intervale de clasă	f
20–24	1
25–29	2
30–34	7
35–39	18
40–44	22
45–49	42
50–54	30
55–59	37
60–64	15
65–69	6
TOTAL	180

Media aritmetică pentru date grupate

Pentru a calcula media aritmetică a unei mulțimi de scoruri trebuie să cunoaștem două valori: suma tuturor scorurilor, ΣX_i, și numărul de scoruri, n. În cazul distribuției din tabelul 3.6, nu știm decât că $n = 180$. Deoarece datele au fost grupate, nu cunoaștem distribuția exactă a scorurilor individuale, deci nu putem determina exact ΣX_i.

Să considerăm primul interval (20–24). În acest interval se află un singur caz, dar nu știm care este scorul acestuia. Pentru a depăși această dilemă, vom presupune că scorul acestui caz este situat în centrul intervalului. Această presupunere revine la a spune că scorul cazului din acest interval este 22, acest număr aproximând scorul său efectiv. În cel de-al

doilea interval (25–29) se află două cazuri. Şi aici vom presupune că scorurile celor două cazuri sunt situate în centrul intervalului, presupunere ce revine la a spune că fiecare dintre cele două cazuri are scorul 27. Sub această presupunere, suma scorurilor individuale din cel de-al doilea interval este 54 (27×2), acest număr aproximând suma reală a scorurilor individuale din interval. Procedând la fel pentru celelalte intervale şi adunând apoi rezultatele, vom obţine un număr care aproximează suma reală a tuturor scorurilor individuale. În fine, împărţind valoarea astfel obţinută la numărul de scoruri (180), vom obţine media aritmetică aproximativă a scorurilor.

În general, supoziţia calculului mediei aritmetice pentru date grupate este că în fiecare interval de clasă toate scorurile sunt situate în centrul intervalului respectiv. Sub această supoziţie, procedura de calcul este următoarea:

1. Pentru fiecare interval i, se calculează centrul m_i.

2. Numărul de cazuri din fiecare interval, f_i, se înmulţeşte cu centrul intervalului respectiv, m_i ($f_i m_i$).

3. Se calculează $\Sigma f_i m_i$, iar valoarea astfel obţinută se împarte la numărul de scoruri (n).

Întrucât $\Sigma f_i m_i \cong \Sigma X_i$, vom avea:

Formula 3.3. $\overline{X} \cong \dfrac{\sum f_i m_i}{n}$

Pentru a aplica această procedură la exemplul nostru, vom adăuga două coloane la distribuţia de frecvenţe din tabelul 3.6, una pentru centrele de interval şi una pentru produsele dintre centrele de interval şi frecvenţe:

Tabelul 3.7. Calculul mediei aritmetice pentru date grupate

Intervale de clasă	f	m	fm
20–24	1	22	22
25–29	2	27	54
30–34	7	32	224
35–39	18	37	666
40–44	22	42	924
45–49	42	47	1974
50–54	30	52	1560
55–59	37	57	2109
60–64	15	62	930
65–69	6	67	402
TOTAL	180		8865

Totalul ultimei coloane este valoarea pentru $\Sigma f_i m_i$. Împărțind această valoare la numărul total de cazuri obținem media aritmetică aproximativă a scorurilor:

$$\overline{X} \cong \frac{\sum f_i m_i}{n} = \frac{8865}{180} = 49{,}25$$

După cum se poate constata, valoarea obținută în acest fel reprezintă o deosebit de bună aproximare a valorii efective a mediei aritmetice.

Mediana pentru date grupate

Știm că pentru a afla mediana unei distribuții ordonate de scoruri trebuie să identificăm mai întâi cazul sau cazurile de mijloc ale distribuției respective. Atunci când se lucrează cu date grupate, se introduce o simplificare: cazul de mijloc este identificat la $n/2$, indiferent dacă n este par sau impar. În exemplul nostru, având 180 de cazuri în eșantion, cazul de mijloc va fi identificat la 180/2, i.e. al 90-lea caz. Mai departe, problema este de a localiza acest caz și apoi de a afla scorul asociat lui. Evident, atunci când datele sunt grupate, cazul de mijloc se află într-un interval de clasă. Supoziția calculului medianei pentru date grupate este că în fiecare interval de clasă toate scorurile sunt distribuite uniform între limitele reale ale intervalului. Astfel, după ce identificăm intervalul care conține cazul de mijloc, vom afla scorul respectiv pe baza acestei supoziții. Pentru identificarea intervalului de clasă care conține cazul de mijloc, adăugăm o coloană de frecvențe cumulate la distribuția de frecvențe inițială:

Tabelul 3.8. Calculul medianei pentru date grupate

Intervale de clasă	*f*	*fc*
20–24	1	1
25–29	2	3
30–34	7	10
35–39	18	28
40–44	22	50
45–49	42	92
50–54	30	122
55–59	37	159
60–64	15	174
65–69	6	180
TOTAL	180	

Inspectând coloana de frecvențe cumulate, constatăm că 50 de cazuri s-au cumulat sub limita superioară a intervalului 40–44 și că 92 de cazuri s-au cumulat sub limita superioară a intervalului 45–49. Știm acum că mediana – scorul asociat celui de-al 90-lea caz – este o valoare cuprinsă între limita reală inferioară și limita reală superioară ale intervalului 45–49, adică între 44,5 și 49,5. Mai departe, presupunem că toate cele 42 de cazuri situate în acest interval sunt distribuite uniform între limitele reale ale intervalului, cazul 51 fiind situat la limita reală inferioară (44,5), iar cazul 92 la limita reală superioară (49,5). În intervalul care conține mediana sunt 42 de cazuri, cazul 92, cumulat în acest interval, fiind al 42-lea; prin urmare, cazul 90 este al 40-lea din cele 42 din interval[3]. Aceasta revine la a spune că, pentru a afla al câtelea caz este cazul 90, scădem din 90 frecvența cumulată a cazurilor aflate sub intervalul în care se află mediana: 90 – 50 = 40. Dacă, așa cum am presupus, scorurile sunt distribuite uniform, atunci cazul 90 se află la 40/42 din distanța dintre 44,5 și 49,5. Acum, 40/42 din 5 (mărimea intervalului) este 4,75, astfel încât putem aproxima mediana la 44,5 + 4,75 sau 49,25.

În general, sub supoziția că în fiecare interval de clasă toate scorurile sunt distribuite uniform între limitele reale ale intervalului, procedura de calcul al medianei pentru date grupate este următoarea:

1. Se află cazul de mijloc, dat de $n/2$.

2. Se construiește o coloană de frecvențe cumulate și cu ajutorul acesteia se identifică intervalul care conține cazul de mijloc.

3. Se află al câtelea caz din interval este cazul de mijloc, scăzând din $n/2$ frecvența cumulată a cazurilor aflate sub intervalul identificat în pasul 2.

4. Numărul obținut în pasul 3 se împarte la numărul de cazuri din interval.

5. Numărul obținut în pasul 4 se înmulțește cu mărimea intervalului.

6. Numărul obținut în pasul 5 se adună cu limita de clasă reală inferioară a intervalului care conține cazul de mijloc. Rezultatul reprezintă valoarea aproximativă a medianei.

Formula următoare rezumă acești pași:

Formula 3.4. $\tilde{X} \cong LCRI_{\tilde{X}} + \left(\frac{n/2 - fc_i}{f_i} \right) i$

[3] Cu alte cuvinte, cazul 51 este primul, 52 al doilea, ..., 90 al 40-lea.

în care $LCRI_{\tilde{X}}$ = limita de clasă reală inferioară a intervalului care conține al $n/2$-lea caz;

n = numărul total de cazuri;

fc_i = frecvența cumulată sub intervalul care conține al $n/2$-lea caz;

f_i = numărul de cazuri din intervalul care conține al $n/2$-lea caz;

i = mărimea intervalului care conține al $n/2$-lea caz;

Aplicând această formulă la exemplul nostru, avem:

$$\tilde{X} \cong LCRI_{\tilde{X}} + \left(\frac{n/2 - fc_i}{f_i}\right) i = 44{,}5 + \left(\frac{(180/2) - 50}{42}\right) 5 =$$

$$= 44{,}5 + 4{,}75 = 49{,}25$$

Vom spune că aproximativ jumătate din subiecții din eșantion au obținut un scor mai mic de 49,25 și jumătate mai mare de 49,25. Și de data aceasta se poate constata că valoarea obținută în acest fel reprezintă o foarte bună aproximare a valorii efective a medianei.

Intervalul modal

Atunci când datele sunt grupate, scorul modal efectiv al distribuției de frecvențe respective nu poate fi determinat. Într-o astfel de situație se poate determina doar **intervalul modal** – intervalul care conține cel mai mare număr de cazuri –, centrul acestui interval fiind considerat modul distribuției. Pentru o mai bună aproximare a modului unei distribuții cu date grupate, în cazul în care distribuția are două sau mai multe intervale neadiacente în care numărul de scoruri este mai mare decât în intervalele adiacente, atunci distribuția respectivă este considerată *multimodală* (bimodală, trimodală etc.). În exemplul nostru, conform definiției stricte, intervalul modal este 45–49, astfel că centrul acestui interval, 47, apare ca mod al distribuției. Totuși, întrucât aici apar două intervale neadiacente, 45–49 și 55–59, în care numărul de scoruri este mai mare decât în intervalele adiacente, 42 și respectiv 37, vom considera că distribuția este bimodală, cele două moduri fiind centrele de interval respective: 47 și 57. Se poate constata că intervalul 55–59 conține modul efectiv al distribuției de frecvențe, 56.

3.2. PERCENTILE

Mărimile tendinței centrale furnizează informații despre mulțimi de scoruri. În anumite cazuri însă, cercetătorul poate fi interesat de descrierea poziției unui scor individual în raport cu celelalte scoruri dintr-o distribuție. Dacă, de pildă, un subiect a obținut scorul 47 la un test de cunoștințe, semnificația acestui scor poate fi explicată inclusiv în termenii numărului de subiecți din eșantionul considerat care au obținut scoruri mai mici decât 47.

Poziția unui scor individual într-o distribuție poate fi determinată cu ajutorul percentilelor. Cea de-a m-a **percentilă** a unei mulțimi de scoruri, P_m, este valoarea față de care *cel mult* m% din scoruri sunt mai mici decât m și *cel mult* $(100 - m)$% din scoruri sunt mai mari decât m. Întrucât mediana unei mulțimi de scoruri este valoarea față de care cel mult 50% din scoruri sunt mai mici și cel mult 50% din scoruri sunt mai mari, mediana este cea de-a 50-a percentilă a acelei mulțimi. Tot așa cum există un nume special pentru cea de-a 50-a percentilă a unei mulțimi de scoruri, există nume speciale pentru percentilele care împart o mulțime ordonată de scoruri în sferturi și în zecimi: **cuartile**[4] și, respectiv, **decile**. Lista următoare prezintă cele mai utilizate percentile, împreună cu simbolurile uzuale pentru cuartile și decile (considerând că este vorba despre o mulțime de scoruri ordonată crescător):

D_1 = Prima decilă = P_{10};
Q_1 = Prima cuartilă = P_{25};
Q_2 = A doua cuartilă = $P_{50} = \tilde{X}$;
Q_3 = A treia cuartilă = P_{75};
D_9 = A noua decilă = P_{90}.

Pentru ilustrare, fie următoarea mulțime ordonată de 15 scoruri:

2, 4, 4, 5, 7, 8, 10, 12, 17, 18, 18, 21, 27, 29, 30
↓ ↓ ↓
Q_1 $\tilde{X}$ Q_3

Prima cuartilă este valoarea față de care cel mult 25% din scoruri, i.e. cel mult (15/100)25 = 3,75 scoruri, sunt mai mici și cel mult 75% din scoruri, i.e. cel mult (15/100)75 = 11,25 scoruri, sunt mai mari. Singurul

[4] Cuartilele sunt valori care împart o mulțime ordonată de scoruri în patru părți egale. În practică, termenul *cuartilă* se folosește adesea pentru referire la unul dintre aceste sferturi.

scor care satisface acest criteriu este 5, deci $Q_1 = 5$. Cea de-a doua cuartilă, mediana, este scorul central, i.e. 12. Cea de-a treia cuartilă este valoarea față de care cel mult 75% din scoruri, i.e. cel mult 11,25 scoruri sunt mai mici și cel mult 25% din scoruri, i.e. 3,75 scoruri, sunt mai mari. Singurul scor care satisface acest criteriu este 21, deci $Q_3 = 21$.

De notat că $(n/100)25 = n(0,25)$, iar $(n/100)75 = n(0,75)$. Ca atare, pentru Q_1 putem folosi formula $n(0,25)$, iar pentru Q_3 formula $n(0,75)$ sau, echivalent, $n - n(0,25)$. În exemplul nostru, $n(0,25) = 3,75$ și $n(0,75) = n - n(0,25) = 11,25$.

Uneori, percentila căutată „cade" între două scoruri din mulțimea respectivă. Într-un astfel de caz, prin convenție, se alege media aritmetică a celor două scoruri pentru a aproxima percentila căutată. Să presupunem că ne interesează ce-a de-a 20-a percentilă din mulțimea de mai sus. Aceasta ar fi valoarea față de care cel mult 3 scoruri sunt mai mici și cel mult 12 scoruri sunt mai mari. Întrucât orice număr cuprins între 4 și 5 (inclusiv) satisface acest criteriu, vom alege 4,50 drept ce-a de-a 20-a percentilă.

Procedura de calcul a percentilelor pentru date grupate este asemănătoare procedurii de calcul a medianei pentru date grupate. Să considerăm din nou distribuția de frecvențe a scorurilor obținute la un test de cunoștințe de 180 de subiecți și să presupunem că ne interesează cea de-a 75-a percentilă. Pentru a o afla, vom folosi tabelul 3.8, care include o coloană de frecvențe cumulate.

Mai întâi, identificăm intervalul de clasă care conține percentila căutată. Având 180 de scoruri individuale în eșantion, P_{75} este valoarea față de care cel mult 135 ($180 \times 0,75$) de scoruri sunt mai mici și cel mult 45 ($180 - 135$) de scoruri sunt mai mari. Ca atare, intervalul de clasă care conține percentila căutată este cel care conține valoarea față de care cel mult 135 ($180 \times 0,75$) de scoruri sunt mai mici. Inspectând coloana de frecvențe cumulate din tabelul 3.8, constatăm că 122 de cazuri sau scoruri s-au cumulat sub limita superioară a intervalului 50–54 și că 159 de cazuri sau scoruri s-au cumulat sub limita superioară a intervalului 55–59. Știm acum că P_{75} este o valoare cuprinsă între limita reală inferioară și limita reală superioară ale intervalului 55–59, adică între 54,5 și 59,5. Mai departe, presupunem că toate cele 37 de cazuri situate în acest interval sunt distribuite uniform între limitele reale ale intervalului, cazul 123 fiind situat la limita reală inferioară (54,5), iar cazul 159 la limita reală superioară (59,5). În intervalul care conține P_{75} sunt 37 de cazuri, cazul 135 fiind al 13-lea: cazul 123 este primul, 124 al doilea, ..., 135 al 13-lea. Aceasta

revine la a spune că, pentru a afla al câtelea caz este cazul 135, scădem din 135 frecvența cumulată a cazurilor aflate sub intervalul în care se află cazul 135: 135 – 122 = 13. Dacă, așa cum am presupus, scorurile sunt distribuite uniform, atunci cazul 135 se află la 13/37 din distanța dintre 54,5 și 59,5. Acum, 13/37 din 5 (mărimea intervalului) este 1,75, așa încât putem aproxima P_{75} la 54,5 + 1,75 sau 56,25.

Formula următoare rezumă pașii de calcul al percentilelor pentru date grupate:

Formula 3.5. $P_m \cong LCRI_m + \left(\frac{np - fc_i}{f_i}\right)i$

în care $LCRI_m$ = limita de clasă reală inferioară a intervalului care conține P_m;

n = numărul total de scoruri;
p = proporția corespunzătoare P_m;
fc_i = frecvența cumulată sub intervalul care conține P_m;
f_i = numărul de cazuri din intervalul care conține P_m;
i = mărimea intervalului.

Aplicând formula 3.5 la exemplul nostru, avem:

$$P_{75} \cong 54{,}5 + \left(\frac{(180 \times 0{,}75) - 122}{37}\right)5 = 54{,}5 + 1{,}75 = 56{,}25$$

Să presupunem acum că ne interesează procentul de subiecți care au obținut un scor mai mic sau egal cu 47 și că nu dispunem decât de datele grupate din tabelul 3.8. Procentul de cazuri care au un scor mai mic sau egal cu un scor dat se numește **rangul percentilei** scorului respectiv.

Pentru a afla rangul percentilei pentru scorul 47, notat RP_{47}, observăm mai întâi că acest scor este cuprins în intervalul 45–49 și că 50 de cazuri s-au cumulat sub limita reală inferioară a acestui interval, 44,5. Ca și până acum, vom presupune că toate cele 42 de cazuri situate în acest interval sunt distribuite uniform între limitele reale ale intervalului. Sub această presupunere, proporția de cazuri din interval care au scoruri mai mici sau egale cu 47 este (47,0 – 44,5)/5 = 2,5/5 = 0,5. Ca atare, în acest interval sunt 42 × 0,5 = 21 de scoruri mai mici sau egale cu 47. Prin urmare, numărul total de scoruri mai mici sau egale cu 47 este 50 + 21 = 71, iar rangul percentilei scorului 47 poate fi aproximat la (71/180) × 100 = 38,9. Aceasta înseamnă că 38,9% din cazuri au un scor mai mic sau egal cu scorul 47.

Următoarea formulă rezumă paşii de calcul al rangului percentilelor pentru date grupate:

Formula 3.6. $$RP_X \cong \frac{fc_i + \left(\frac{X - LCRI_X}{i} \times f_i\right)}{n} \times 100$$

în care fc_i = frecvenţa cumulată sub intervalul care conţine scorul X;

X = scorul pentru care se determină RP_X.

$LCRI_X$ = limita de clasă reală inferioară a intervalului care conţine scorul X;

i = mărimea intervalului;

f_i = numărul de cazuri din intervalul care conţine scorul X;

n = numărul total de cazuri.

Aplicând această formulă la exemplul nostru, avem:

$$RP_{47} \cong \frac{50 + \left(\frac{47 - 44{,}5}{5} \times 42\right)}{180} \times 100 = \frac{50 + 21}{180} \times 100 = 38{,}9$$

Percentilele şi rangul percentilelor pentru date grupate pot fi aproximate şi folosind ogivele. Pentru exemplificare, să folosim ogiva construită în capitolul anterior pentru scorurile celor 180 de subiecţi:

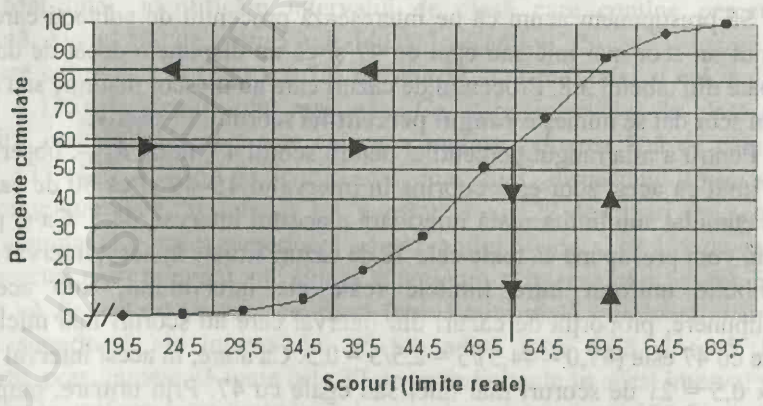


Figura 3.4. Ogivă pentru scorurile obţinute la un test de cunoştinţe

Pentru a afla, de pildă, P_{58}, din punctul 58 de pe axa procentelor trasăm o paralelă cu axa scorurilor care să intersecteze curba, iar din punctul de intersecție trasăm o perpendiculară pe axa scorurilor. Punctul de intersecție al acestei perpendiculare cu axa scorurilor este P_{58}. Pentru a afla RP_{62}, din punctul 62 de pe axa scorurilor trasăm o paralelă cu axa procentelor care să intersecteze curba, iar din punctul de intersecție trasăm o perpendiculară pe axa procentelor. Punctul de intersecție al acestei perpendiculare cu axa procentelor este RP_{62}.

3.3. MĂRIMILE DISPERSIEI

Descrierea unei distribuții de scoruri cu ajutorul mărimilor tendinței centrale nu epuizează informația relevantă statistic despre distribuția respectivă. Pentru descrierea completă a unei distribuții de scoruri trebuie să considerăm și **mărimile dispersiei**. Aceste mărimi furnizează informații despre eterogenitatea sau varietatea unei distribuții de scoruri.

De pildă, o medie aritmetică de 6,33 poate fi obținută dintr-o mulțime de scoruri similare, concentrate în jurul acestei valori – precum 6, 6, 7 – sau dintr-o mulțime de scoruri nesimilare, împrăștiate în raport cu această valoare – precum 1, 8, 10. În cazul unor scoruri similare sau cu *variabilitate scăzută*, media aritmetică este mai adecvată pentru măsurarea tendinței centrale decât în cazul unor scoruri nesimilare sau cu *variabilitate înaltă*. Luând un exemplu pur didactic, informația conform căreia media aritmetică a vârstelor dintr-un eșantion este de 25 de ani este relevantă dacă vârstele subiecților din eșantion sunt relativ grupate în jurul acestei valori și este neimportantă dacă eșantionul respectiv este alcătuit din două grupuri, unul cu vârste cuprinse între 1 și 10 ani, celălalt cu vârste cuprinse între 40 și 50 de ani.

În această secțiune vom introduce cele mai des folosite mărimi ale dispersiei: indicele variației calitative, amplitudinea și amplitudinea intercuartilică, abaterea medie, varianța, abaterea standard și coeficientul de variație. Fiecare dintre aceste mărimi furnizează o indicație precisă a eterogenității unei distribuții de scoruri.

3.3.1. Indicele variației calitative

Indicele variației calitative (*IQV*)[5] reprezintă raportul dintre variația observată efectiv într-o distribuție de scoruri și variația maxim posibilă

[5] Prescurtare de la denumirea acestei mărimi în limba engleză: *Index of Qualitative Variation.*

pentru acea distribuție. *IQV* poate lua valori cuprinse între 0,00 (nici o variație sau variație nulă) și 1,00 (variație maximă). Acest indice se folosește în mod obișnuit pentru variabile măsurate la nivel nominal, putând fi utilizat și pentru variabile măsurate la celelalte niveluri, dacă scorurile respective sunt grupate în distribuții de frecvențe.

Pentru ilustrare, să presupunem că un cercetător este interesat în compararea eterogenității religioase a trei colectivități – *A*, *B* și *C* –, datele obținute fiind cele din tabelul următor:

Tabelul 3.9. Apartenența religioasă în trei colectivități

Denominația	Colectivitatea		
	A	*B*	*C*
Creștin-ortodox	90	60	30
Catolic	0	20	30
Altele	0	10	30
TOTAL	90	90	90

Simpla inspecție a datelor din acest tabel arată că, dintre cele trei colectivități, *A* este cel mai puțin eterogenă. Mai exact, eterogenitatea religioasă în colectivitatea *A* este nulă, întrucât toți membrii acestei colectivități sunt creștin-ortodocși. Apoi, colectivitatea *C* este cea mai eterogenă, *B* situându-se între *A* și *C*. Să vedem în continuare cum sunt reflectate aceste observații de către *IQV*, a cărui formulă de calcul este următoarea:

Formula 3.7. $IQV = \dfrac{k(n^2 - \sum f^2)}{n^2(k-1)}$

în care k = numărul de categorii;

n = numărul total de cazuri din cele k categorii;

$\sum f^2$ = suma pătratelor frecvențelor din fiecare categorie.

Să aplicăm această formulă la fiecare dintre cele trei distribuții de frecvențe. Pentru aceasta, trebuie să calculăm mai întâi suma pătratelor frecvențelor respective. Astfel, pentru colectivitatea *A*, avem:

$$\sum f^2 = 90^2 + 0^2 + 0^2 = 8100$$

$$IQV = \frac{3(90^2 - 8100)}{90^2(3-1)} = \frac{3(8100 - 8100)}{8100 \cdot 2} = \frac{3 \cdot 0}{16200} = \frac{0}{16200} = 0$$

Întrucât valorile pentru k şi n sunt aceleaşi în toate cele trei distribuţii, IQV pentru celelalte două colectivităţi poate fi calculat schimbând doar valorile pentru $\sum f^2$. Pentru colectivitatea B, avem:

$$\sum f^2 = 60^2 + 20^2 + 10^2 = 4100$$

$$IQV = \frac{3(8100 - 4100)}{16200} = \frac{3 \cdot 4000}{16200} = \frac{12000}{16200} = 0{,}74$$

Pentru colectivitatea C:

$$\sum f^2 = 30^2 + 30^2 + 30^2 = 2700$$

$$IQV = \frac{3(8100 - 2700)}{16200} = \frac{3 \cdot 5400}{16200} = \frac{16200}{16200} = 1{,}00$$

După cum se poate constata, IQV reflectă cantitativ şi precis observaţiile de mai sus. Colectivitatea A prezintă o variaţie nulă a variabilei măsurate ($IQV = 0$), colectivitatea C prezintă variaţia maxim posibilă pentru aceste date ($IQV = 1{,}00$), iar colectivitatea B se situează între A şi C, cu o variaţie substanţială ($IQV = 0{,}74$).

3.3.2. Amplitudinea şi amplitudinea intercuartilică

Amplitudinea se poate exprima atât ca mărime absolută, cât şi ca mărime relativă. **Amplitudinea absolută** (A) este o mărime a dispersiei uşor de calculat, cu care ne-am întâlnit deja în capitolul anterior, definită drept diferenţa dintre cel mai mare scor şi cel mai mic scor din mulţimea scorurilor date:

$$A = X_{max} - X_{min}$$

Pentru datele din tabelul 2.4, de pildă, $A = 69 - 24 = 45$. În cazul unei distribuţii de frecvenţe cu date grupate, amplitudinea absolută se aproximează prin diferenţa dintre limita de clasă reală superioară a ultimului interval şi limita de clasă reală inferioară a primului interval[6]:

$$A = LCRS_{max} - LCRI_{min}$$

Astfel, pentru datele din tabelul 3.6, $A \cong 69{,}5 - 19{,}5 = 50$.

Amplitudinea intercuartilică (Q) se defineşte ca diferenţa dintre cea de-a treia şi prima cuartilă a unei distribuţii de scoruri ordonate crescător:

$$Q = Q_3 - Q_1$$

[6] Considerând intervalele de clasă în ordine crescătoare.

Să considerăm din nou un exemplu prezentat în secțiunea 3.2. Fie următoarea mulțime ordonată de 15 scoruri:

2, 4, 4, 5, 7, 8, 10, 12, 17, 18, 18, 21, 27, 29, 30

Q_1 $\tilde{X}$ Q_3

În acest exemplu, $A = 30 - 2 = 28$ și $Q = 21 - 5 = 16$.

Întrucât iau în considerare doar scorurile extreme dintr-o distribuție, nici A, nici Q nu oferă informații despre natura scorurilor dintre cele două extreme: dacă scorurile sunt grupate în centrul distribuției; dacă sunt împrăștiate omogen între cele două scoruri extreme; dacă sunt concentrate în două grupe, câte una lângă fiecare extremă, distribuția fiind bimodală etc. Totuși, aceste mărimi sunt utile atunci când dorim să obținem rapid o măsură a variabilității unei distribuții și, mai ales, atunci când dorim să realizăm rapid o comparație între variabilitățile a două distribuții cu un număr egal de scoruri. Să presupunem, de pildă, că am înregistrat vârstele subiecților din două eșantioane, obținând următoarele date:

Eșantionul 1	11, 16, 18, 23, 29, 31, 37
Eșantionul 2	18, 19, 21, 23, 24, 26, 29

Mediile aritmetice pentru cele două eșantioane sunt $\bar{X}_1 = 23{,}57$ și $\bar{X}_2 = 22{,}86$, mediana fiind aceeași pentru ambele eșantioane: 23. Întrucât amplitudinea vârstelor din primul eșantion, 26, este mai mare decât amplitudinea vârstelor din cel de-al doilea eșantion, 11, primul eșantion este mai eterogen din punctul de vedere al vârstelor.

3.3.3. Abaterea medie și varianța

Mărimile dispersiei pe care le expunem în continuare captează ideea de variabilitate a unei distribuții de scoruri de interval sau de raport față de centrul acelei distribuții, mai precis, față de media sa aritmetică și folosesc *toate* scorurile distribuției.

Știm că într-o distribuție de scoruri de interval sau de raport cu media aritmetică $\bar{X}$, diferența $X_i - \bar{X}$ reprezintă *abaterea* scorului X_i față de media aritmetică $\bar{X}$. O sugestie pentru a obține o mărime mai adecvată a dispersiei ar fi să însumăm toate abaterile scorurilor individuale față de medie și să împărțim suma astfel obținută la numărul total de scoruri, n. Mai știm, însă, că pentru orice distribuție de scoruri, suma abaterilor scorurilor de la media lor aritmetică este egală cu zero, $\sum(X_i - \bar{X}) = 0$, astfel încât rezultatul împărțirii acestei sume la n ar fi întotdeauna 0. Pentru a folosi cumva sugestia menționată, avem la dispoziție două posibilități: sau

neglijăm semnele abaterilor, considerând *valorile absolute* ale acestora[7], sau ridicăm la pătrat abaterile, întrucât dacă se înmulțesc două numere care au semnul minus, produsul este pozitiv.

Prima posibilitate conduce la o mărime a dispersiei, numită **abaterea medie** și notată cu $\bar{d}$, a cărei formulă de calcul este următoarea:

Formula 3.8. $\bar{d} = \dfrac{\sum |X_i - \bar{X}|}{n}$

Cea de-a doua posibilitate conduce la o altă mărime a dispersiei, numită **varianță**[8], notată cu s^2 atunci când este vorba despre un eșantion și cu σ^2 atunci când este vorba despre o populație. Formula de calcul a variației pentru populații este următoarea:

Formula 3.9. $\sigma^2 = \dfrac{\sum (X_i - \mu)^2}{N}$

în care μ = media aritmetică a populației;

N = numărul total de scoruri din populație.

Formula de calcul a variației pentru eșantioane diferă de formula 3.9 sub două aspecte: în locul mediei aritmetice a populației (μ) apare media aritmetică a eșantionului ($\bar{X}$), iar la numitor, în locul numărului total de scoruri din populație (N) apare numărul total de scoruri din eșantion diminuat cu o unitate ($n - 1$)[9].

Formula 3.10. $s^2 = \dfrac{\sum (X_i - \bar{X})^2}{n-1}$

Pentru a ilustra calculul abaterii medii și al variației, vom folosi datele din tabelul 3.2, adăugând o coloană pentru modulele diferențelor $X_i - \bar{X}$ și, pentru o simplificare pe care o vom menționa ulterior, o coloană pentru pătratele scorurilor individuale, X_i^2:

---

[7] Revedeți capitolul 1, secțiunea 1.2.

[8] Uneori, această mărime este numită chiar *dispersie*.

[9] După cum vom vedea în capitolele dedicate statisticii inferențiale, mărimile statistice pentru eșantioane servesc drept *estimatori* ai valorilor respective pentru populație, unii estimatori fiind *nedistorsionați*, alții fiind *distorsionați*. Întrucât varianța pentru un eșantion este un estimator distorsionat al variației pentru populație, numitorul $n - 1$ are rolul de a corecta distorsiunea. Aceleași considerații sunt valabile și pentru abaterea standard. În cadrul statisticii descriptive, unii statisticieni preferă să folosească numitorul n, tratând eșantioanele ca și cum ar fi populații foarte mici.

Tabelul 3.10. Calculul abaterii medii şi al varianţei ($\bar{X} = 19$)

X_i	X_i^2	$X_i - \bar{X}$	$\lvert X_i - \bar{X} \rvert$	$(X_i - \bar{X})^2$
16	256	–3	3	9
17	289	–2	2	4
17	289	–2	2	4
17	289	–2	2	4
17	289	–2	2	4
18	324	–1	1	1
19	361	0	0	0
19	361	0	0	0
23	529	4	4	16
23	529	4	4	16
23	529	4	4	16
209	4045	0	24	74

Pentru datele din acest exemplu, avem:

$$\bar{d} = \frac{\sum \lvert X_i - \bar{X} \rvert}{n} = \frac{24}{11} = 2{,}20$$

$$s^2 = \frac{\sum (X_i - \bar{X})^2}{n-1} = \frac{74}{10} = 7{,}40$$

De notat că varianţa calculată cu ajutorul formulei 3.9 reprezintă *pătratul mediu al abaterilor*, i.e. media aritmetică a pătratelor abaterilor scorurilor populaţiei de la media lor aritmetică μ.

În cazul eşantioanelor mari, aplicarea formulei definiţionale 3.10 poate fi greoaie, mai ales dacă valoarea pentru $\bar{X}$ conţine zecimale, ceea ce presupune multe rotunjiri. Din formula 3.10 se poate deduce o serie de formule de calcul care, aplicate la aceleaşi date, produc aceleaşi rezultate ca şi formula 3.10 şi permit calcularea mai uşoară şi mai rapidă a varianţei[10]. Prezentăm în continuare două astfel de formule, în care nu mai este nevoie de calcularea diferenţelor $X_i - \bar{X}$.

Formula 3.11. $s^2 = \dfrac{\sum X_i^2 - n\bar{X}^2}{n-1}$

[10] Două formule de calcul care, aplicate la aceleaşi date, produc aceleaşi rezultate se numesc *echivalente algebric*.

Formula 3.12. $s^2 = \dfrac{\sum X_i^2 - \dfrac{(\sum X_i)^2}{n}}{n-1}$

Aplicând formula 3.11 la datele din exemplul de mai sus, avem:

$$s^2 = \frac{\sum X_i^2 - n\bar{X}^2}{n-1} = \frac{4045 - (11 \times 19^2)}{10} = \frac{4045 - 3971}{10} = \frac{74}{10} = 7{,}40$$

Deşi pare mai complicată decât formula 3.10, formula 3.12 ne scuteşte de calcularea mediei aritmetice a scorurilor, astfel încât pentru calcularea varianţei cu ajutorul acestei formule este nevoie doar de scorurile individuale. În exemplul nostru:

$$s^2 = \frac{\sum X_i^2 - \dfrac{(\sum X_i)^2}{n}}{n-1} = \frac{4045 - \dfrac{209^2}{11}}{10} = \frac{4045 - 3971}{10} = \frac{74}{10} = 7{,}40$$

Formulele de calcul simplificat al varianţei pentru populaţii diferă de formulele de mai sus prin aceea că $\bar{X}$ se înlocuieşte cu μ, iar $n - 1$ devine N.

3.3.4. Abaterea standard şi coeficientul de variaţie

Calculul varianţei implică ridicarea la pătrat a abaterilor scorurilor individuale faţă de media lor aritmetică (formulele 3.9 şi 3.10). În consecinţă, unitatea ataşată varianţei este pătratul unităţii ataşate scorurilor individuale respective. Dacă, de pildă, este vorba despre scoruri exprimate în ani, varianţa va fi exprimată în ani la pătrat. Pentru a se obţine o mărime a variabilităţii care să fie exprimată în aceleaşi unităţi în care sunt exprimate scorurile respective, se ia rădăcina pătrată a varianţei, s sau σ. Această mărime statistică se numeşte **abatere standard** şi, în cazul eşantioanelor, se defineşte cu ajutorul următoarei formule:

Formula 3.13. $s = \sqrt{\dfrac{\sum (X_i - \bar{X})^2}{n-1}}$

Relaţia dintre abaterea standard şi varianţă fiind $s = \sqrt{s^2}$, valoarea abaterii standard pentru datele din tabelul 3.10 este $s = \sqrt{7{,}40} = 2{,}72$.

Corespunzător formulelor 3.11 şi 3.12, avem următoarele formule de calcul simplificat al abaterii standard:

Formula 3.14. $s = \sqrt{\dfrac{\Sigma X_i^2 - n\overline{X}^2}{n-1}}$

Formula 3.15. $s = \sqrt{\dfrac{\Sigma X_i^2 - \dfrac{(\Sigma X_i)^2}{n}}{n-1}}$

Coeficientul de variație al unei distribuții de scoruri (*CV*) se definește ca raportul dintre abaterea standard a distribuției și media sa aritmetică. De obicei, coeficientul de variație se înmulțește cu 100 și se prezintă ca procent. Astfel, avem:

Formula 3.16. $CV = \dfrac{s}{\overline{X}} \cdot 100$

În exemplul folosit până acum, $CV = (2{,}72/19) \cdot 100 = 143{,}16$. Evident, în cazul populațiilor, s se înlocuiește cu σ, iar $\overline{X}$ cu μ. Coeficientul de variație este cu deosebire util atunci când se dorește compararea variabilității a două distribuții de scoruri cu medii aritmetice sensibil diferite.

3.3.5. Calculul abaterii standard pentru date grupate

Formula de calcul a abaterii standard pentru date grupate se obține pe baza formulei 3.15. Pentru a aplica formula 3.15 trebuie să cunoaștem trei valori: suma scorurilor, ΣX_i, suma pătratelor scorurilor, ΣX_i^2, și numărul de scoruri, n. Atunci când datele au fost grupate în distribuții de frecvențe nu cunoaștem distribuția exactă a scorurilor individuale, deci nu putem determina exact primele două valori. Într-un astfel de caz, suma scorurilor se aproximează, ca și pentru media aritmetică, înmulțind numărul de cazuri din fiecare interval, f_i, cu centrul intervalului respectiv, m_i, și însumând aceste produse: $\Sigma f_i m_i$. Suma pătratelor scorurilor se aproximează ridicând la pătrat centrele de interval, înmulțind fiecare pătrat astfel obținut cu numărul de cazuri din intervalul respectiv și însumând aceste produse: $\Sigma f_i m_i^2$. Avem astfel:

$$\Sigma X_i \cong \Sigma f_i m_i$$

$$\Sigma X_i^2 \cong \Sigma f_i m_i^2$$

Formula care dă valoarea aproximativă a abaterii standard pentru date grupate se obține făcând substituțiile corespunzătoare în formula 3.15. Obținem astfel:

Formula 3.17. $s \cong \sqrt{\dfrac{\sum f_i m_i^2 - \dfrac{(\sum f_i m_i)^2}{n}}{n-1}}$

Pentru ilustrare, vom folosi datele din tabelul 3.7, în care vom adăuga două coloane: una pentru pătratele centrelor de interval şi una pentru produsele dintre pătratele centrelor de interval şi frecvenţe:

Tabelul 3.11. Calculul abaterii standard pentru date grupate

Intervale de clasă	f	m	fm	m^2	fm^2
20–24	1	22	22	484	484
25–29	2	27	54	729	1458
30–34	7	32	224	1024	8428
35–39	18	37	666	1369	24.642
40–44	22	42	924	1764	38.808
45–49	42	47	1974	2209	92.778
50–54	30	52	1560	2704	81.120
55–59	37	57	2109	3249	120.213
60–64	15	62	930	3844	57.660
65–69	6	67	402	4489	26.934
TOTAL	180		8865		452.525

Totalul ultimei coloane este valoarea pentru $\Sigma f_i m_i^2$. Aplicând formula 3.17 la aceste date obţinem:

$$s \cong \sqrt{\frac{\sum f_i m_i^2 - \dfrac{(\sum f_i m_i)^2}{n}}{n-1}} = \sqrt{\frac{452525 - \dfrac{8865^2}{180}}{179}} = \sqrt{\frac{452525 - 436601{,}25}{179}} =$$

$$= \sqrt{\frac{15923{,}75}{179}} = \sqrt{88{,}96} = 9{,}43$$

De notat că, pentru datele negrupate corespunzătoare acestui exemplu, abaterea standard calculată cu ajutorul uneia dintre formulele 3.13 – 3.15 este egală cu 9,00.

*

* * *

* * *

Pentru a descrie adecvat o distribuție de scoruri trebuie să răspundem la trei întrebări: Care este forma distribuției? Care este scorul său mediu? Cât de variate sunt scorurile? Modalitățile de răspuns la prima întrebare au fost discutate în capitolul 2. Răspunsurile la ce-a de-a doua întrebare au fost abordate în prima parte a acestui capitol. Am văzut că, în statistică, „scor mediu" are trei înțelesuri diferite, cărora le corespund trei mărimi statistice: media aritmetică, mediana și modul. Media aritmetică, aplicabilă numai pentru date de interval sau de raport, exprimă *scorul tipic* al unei distribuții. Mediana poate fi folosită și pentru nivelul ordinal de măsură și reflectă *scorul central* al unei distribuții. Modul poate fi folosit la orice nivel de măsură și reprezintă *cel mai întâlnit scor* într-o distribuție. În plus, am prezentat modalități de descriere a poziției scorurilor individuale într-o distribuție de interval sau de raport: percentilele și rangul percentilelor. În capitolul următor vom prezenta un alt cadru de referință pentru interpretarea scorurilor individuale: scorurile standard.

În cea de-a doua parte a acestui capitol am prezentat modalități de a răspunde la cea de-a treia întrebare: indicele variației calitative, amplitudinea și amplitudinea intercuartilică, abaterea medie, varianța, abaterea standard și coeficientul de variație. Abaterea standard este cel mai des folosită mărime a dispersiei pentru date de interval și de raport, având avantajul de a fi exprimată în aceleași unități de măsură ca și scorurile respective. Valoarea abaterii standard este cu atât mai mare cu cât distribuția scorurilor este mai eterogenă sau, altfel spus, cu cât variabilitatea distribuției este mai mare. Reciproc, valoarea abaterii standard este cu atât mai mică cu cât distribuția scorurilor este mai omogenă sau, altfel spus, cu cât variabilitatea distribuției este mai mică. Dacă fiecare caz într-o distribuție ar avea același scor, atunci abaterea standard pentru distribuția respectivă ar fi 0. Astfel, abaterea standard nu are limită superioară, iar limita sa inferioară este 0. Abaterea standard își dovedește utilitatea și atunci când se dorește compararea a două sau mai multe distribuții.

GLOSAR

Abatere standard: rădăcina pătrată a câtului dintre suma abaterilor pătratice ale scorurilor față de media lor aritmetică și $n - 1$ pentru eșantioane sau N pentru populații.

Abatere medie: media aritmetică a sumei abaterilor absolute ale scorurilor față de media lor aritmetică.

Amplitudinea absolută: diferența dintre cel mai mare scor și cel mai mic scor dintr-o mulțime de scoruri.

Amplitudine intercuartilică: diferența dintre cea de-a treia și prima cuartilă ale unei distribuții de scoruri ordonate crescător.

Asimetrie: proprietatea unei mulțimi de scoruri de a avea puține scoruri foarte mari (asimetrie pozitivă) sau puține scoruri foarte mici (asimetrie negativă).

Coeficient de variație: raportul dintre abaterea standard a unei distribuții de scoruri și media sa aritmetică. De obicei, coeficientul de variație se înmulțește cu 100 și se prezintă ca procent.

Indicele variației calitative: raportul dintre variația observată efectiv într-o distribuție de scoruri și variația maxim posibilă pentru acea distribuție.

Interval modal: intervalul de clasă care conține cel mai mare număr de cazuri.

Mărimile tendinței centrale: mărimi statistice ce rezumă o întreagă distribuție de scoruri, descriind cea mai tipică sau centrală valoare a distribuției respective sub forma unui singur număr sau a unei singure categorii.

Mărimile dispersiei: mărimi statistice care furnizează informații despre eterogenitatea sau varietatea unei distribuții de scoruri.

Medie aritmetică ponderată: media aritmetică a mai multor grupuri combinate.

Medie aritmetică: rezultatul împărțirii sumei tuturor scorurilor dintr-o mulțime de scoruri la numărul total de scoruri din acea mulțime.

Mediană: punct într-o mulțime de scoruri față de care numărul de cazuri cu scoruri mai mici sau egale este egal cu numărul de cazuri cu scoruri mai mari sau egale.

Mod: scorul care apare cel mai frecvent într-o mulțime de scoruri.

Percentilă: valoarea P_m a unei mulțimi de scoruri față de care *cel mult* m% din scoruri sunt mai mici decât m și *cel mult* $(100 - m)$% din scoruri sunt mai mari decât m.

Varianță: câtul dintre suma abaterilor pătratice ale scorurilor față de media lor aritmetică și $n - 1$ pentru eșantioane sau N pentru populații.

BCU IASI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

4. DISTRIBUȚIA NORMALĂ

Noțiunea de distribuție normală este de mare importanță în statistică. Pe de o parte, distribuția normală poate fi folosită în combinație cu abaterea standard pentru a formula enunțuri descriptive precise despre distribuțiile scorurilor unor variabile. Pe de altă parte, distribuția normală stă la baza multor tehnici statistice inferențiale.

4.1. CARACTERISTICILE DISTRIBUȚIEI NORMALE

Distribuția normală este o distribuție teoretică de scoruri unimodală, simetrică și continuă. Graficul unei distribuții normale are formă de clopot cu ambele extremități extinse la infinit[11]. Ca atare, un astfel de grafic, numit și **curba normală**[12], nu atinge axa orizontală sau, altfel spus, este asimptotic față de axa orizontală, după cum se ilustrează în figura 4.1.

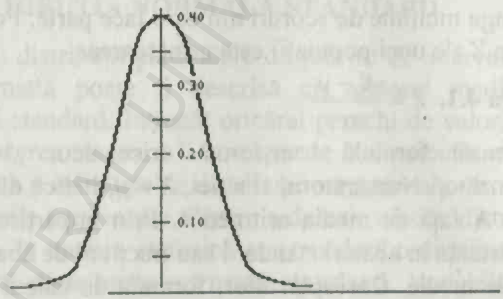


Figura 4.1. Un exemplu de curbă normală

Distribuția normală este un model teoretic ce poate fi folosit pentru a descrie distribuții particulare ale scorurilor unor variabile măsurate la nivel de interval sau de raport, despre care s-a constatat că aproximează suficient normalitatea într-o populație, precum coeficientul de inteligență, rezultatele obținute la diverse teste de cunoștințe sau numărul de erori comise în îndeplinirea anumitor sarcini. Scorurile unor astfel de variabile tind să se

[11] Distribuția normală a fost studiată pentru prima dată în secolul al XVIII-lea de către Abraham De Moivre. La începutul secolului al XIX-lea a fost descoperită independent de Carl Friedrich Gauss și Pierre Simon de Laplace.

[12] În onoarea matematicienilor Gauss și Laplace, curba normală este cunoscută și sub numele de *clopotul lui Gauss* sau *curba Gauss-Laplace*.

grupeze simetric în jurul scorului central, dând naştere unui grafic de distribuţie în formă de clopot. Dacă distribuţia scorurilor unei variabile într-o populaţie aproximează normalitatea, se spune că variabila respectivă este *normal distribuită* în populaţia respectivă sau, pe scurt, că variabila respectivă este *normală*. Pe de altă parte, după cum vom vedea în capitolele care urmează, distribuţia normală poate fi folosită pentru a reprezenta diferite mărimi statistice ce rezultă din studierea unor eşantioane dintr-o populaţie dată, ceea ce permite obţinerea unor concluzii despre valorile pentru populaţie pe baza valorilor cunoscute pentru eşantioane. Utilizarea distribuţiei normale în statistică face apel la aşa-numitele *scoruri standard* sau *scoruri Z*.

4.2. CALCULUL SCORURILOR STANDARD

Scorurile standard, numite şi **scoruri *Z***, folosesc abaterea standard ca unitate de măsură şi descriu poziţia relativă a unui scor individual în raport cu întreaga mulţime de scoruri din care face parte. Formula de calcul pentru scorurile *Z* ale unei populaţii este următoarea:

Formula 4.1. $Z = \dfrac{X - \mu}{\sigma}$

Această formulă transformă orice scor „brut" X în scorul Z corespunzător. Numărătorul fracţiei, $X - \mu$, indică distanţa în unităţi brute a scorului X faţă de media aritmetică. Prin împărţirea acestei distanţe la σ aflăm distanţa în abateri standard sau fracţiuni de abateri standard a scorului X faţă de medie. Corespunzător, formula de calcul pentru scorurile Z ale unui eşantion este următoarea:

Formula 4.2. $Z = \dfrac{X - \bar{X}}{s}$

Pentru ilustrare, să considerăm o distribuţie de scoruri pentru un eşantion, în care $\bar{X} = 100$ şi $s = 20$. În acest caz, scorurile Z corespunzătoare scorurilor brute 85, 120 şi 150 sunt:

$$Z_{85} = \frac{85 - 100}{20} = -0{,}75$$

$$Z_{120} = \frac{120 - 100}{20} = +1{,}00$$

$$Z_{150} = \frac{150 - 100}{20} = +2{,}50$$

Fiecare dintre aceste scoruri Z arată la câte abateri standard față de media aritmetică se află scorul brut corespunzător. Un scor Z negativ arată că scorul brut se află sub media aritmetică, iar un scor Z pozitiv arată că scorul brut este mai mare decât media aritmetică. Evident, un scor Z egal cu 0 arată că scorul brut corespunzător este egal cu media aritmetică.

Se demonstrează că, dacă toate scorurile unei distribuții particulare se transformă în scoruri Z, atunci:

- forma distribuției scorurilor Z este aceeași cu cea a distribuției inițiale;
- media aritmetică a distribuției scorurilor Z este 0, indiferent de valoarea mediei aritmetice a distribuției inițiale;
- abaterea standard a distribuției scorurilor Z este 1, indiferent de valoarea abaterii standard a distribuției inițiale.

Aceste proprietăți au fost generalizate în studiul distribuției normale standard.

4.3. DISTRIBUȚIA NORMALĂ STANDARD

Ca și în cazul unei distribuții particulare de scoruri de interval sau de raport, distribuția normală poate fi descrisă cu ajutorul mediei sale aritmetice și al abaterii standard. Întrucât oricărei perechi de valori pentru media aritmetică și abaterea standard îi corespunde o distribuție normală, matematic vorbind există o infinitate de distribuții normale, ale căror forme exacte depind de mărimile menționate. Pentru a descrie efectiv distribuțiile unor variabile normale, în analiza statistică se consideră o distribuție normală particulară, numită **distribuția normală standard**. Variabila corespunzătoare distribuției normale standard este numită **variabila normală standard**, valorile acestei variabile fiind scoruri Z. Din acest motiv, această distribuție se mai numește și *distribuția Z*. Prin convenție, media aritmetică a distribuției normale standard se ia ca origine a variației variabilei normale standard, ceea ce înseamnă că această distribuție are media aritmetică egală cu 0. De asemenea, se consideră că abaterea standard a distribuției normale standard este egală cu unitatea.

Graficul corespunzător distribuției normale standard este numit **curba normală standard**. Aria delimitată de curba normală standard este proporțională cu frecvența scorurilor, astfel încât proporția de cazuri cuprinse între un scor Z și media aritmetică poate fi aflată cu ajutorul calculului integral. Statisticienii au determinat cu precizie aceste arii, rezultatele fiind organizate sub forma unui tabel, numit **tabelul curbei normale standard** sau **tabelul ariilor de sub curba normală standard** (vezi Anexa A). Schema generală a acestui tabel este prezentată în figura 4.2.

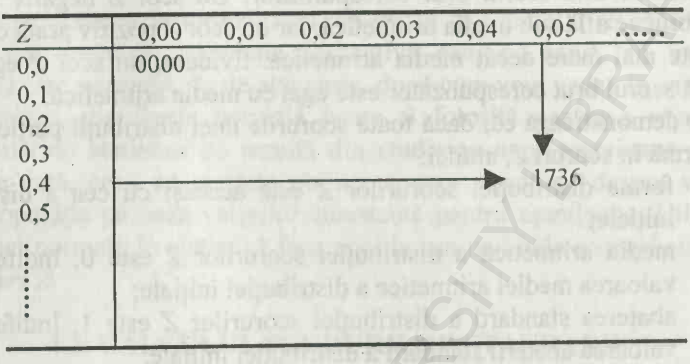


Figura 4.2. Schema tabelului curbei normale standard

În corpul tabelului apar numere alcătuite din patru cifre. Aceste numere reprezintă ariile cuprinse între un scor Z dat şi media aritmetică. Numerele înscrise în prima coloană din stânga, etichetată Z, reprezintă primele două cifre ale unui scor Z, iar numerele înscrise pe primul rând de sus reprezintă cea de-a treia cifră. De pildă, pentru a afla aria cuprinsă între un scor $Z = 0,45$ şi media aritmetică, se coboară în prima coloană din stânga până la 0,4 (primele două cifre ale scorului Z considerat) şi apoi se parcurge spre dreapta rândul respectiv până când se ajunge sub 0,05 (cea de-a treia cifră). Numărul găsit la intersecţia acestor două coordonate este 1736, care poate fi citit sau ca un procent (17,36%) sau ca o proporţie (0,1736). În primul caz vom spune că 17,35% din aria totală a curbei normale standard se află între scorul $Z = 0,45$ şi media aritmetică (punct în care $Z = 0$); în cel de-al doilea caz vom spune că proporţia din aria totală a curbei normale standard cuprinsă între scorul $Z = 0,45$ şi media aritmetică este de 0,1736. Întrucât orice curbă normală este simetrică, aceeaşi procedură se aplică şi pentru a afla aria cuprinsă între un scor Z negativ şi media aritmetică. Astfel, rezultatul de mai sus poate fi interpretat spunând că 17,35% din aria totală a curbei normale standard se află între scorul $Z = -0,45$ şi media aritmetică.

4.4. UTILIZAREA DISTRIBUŢIEI NORMALE STANDARD

Figura 4.3 ilustrează utilizarea tabelului distribuţiei normale standard pentru determinarea procentelor din aria delimitată de curba normală, aflate între un scor Z dat şi media aritmetică ($Z = 0$).

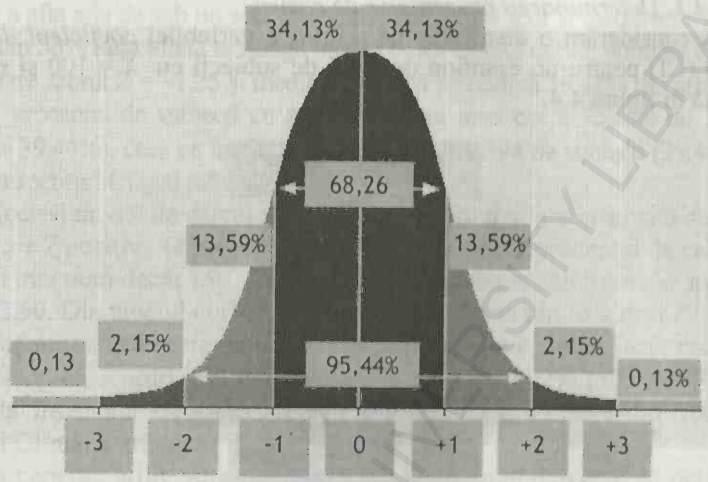


Figura 4.3. Procente din aria de sub curba normală

De pildă, din tabel aflăm că între $Z = +1$ şi media aritmetică se află 34,13% din aria de sub curbă (v. intersecţia coordonatelor 1,0 şi 0,00). Întrucât curba este simetrică, procentul din arie cuprins între $Z = -1$ şi media aritmetică este tot de 34,13%. Astfel, între ±1 abateri standard faţă de medie se află 68,26% din aria totală. Similar, între $Z = +2$ şi medie se află 47,72% din arie, astfel că între ±2 abateri standard faţă de medie se află 94,44% din arie.

Întrucât un procent relativ mic din aria totală se află peste +3 abateri standard sau sub −3 abateri standard (0,13%), pentru scopuri practice, ilustrate în cele ce urmează, se consideră că distribuţia normală se extinde de la $Z \cong -3,59$ la $Z \cong +3,59$ sau, altfel spus, la 3,59 abateri standard de o parte şi de cealaltă a mediei aritmetice, scorurile Z aflate dincolo de aceste limite fiind considerate a fi egale cu 0.

În cazul variabilelor normal distribuite pentru care cunoaştem media aritmetică şi abaterea standard, distribuţia normală standard poate fi folosită pentru a determina diferite procente sau proporţii de cazuri în distribuţii particulare, precum şi pentru a estima probabilitatea ca un caz ales la întâmplare dintr-o distribuţie particulară să aibă un scor cuprins într-o amplitudine dată de scoruri.

4.4.1. Determinarea procentelor de cazuri

Să considerăm o distribuție de scoruri a variabilei *coeficient de inteligență* (CI) pentru un eșantion de 1000 de subiecți cu $\overline{X} = 100$ și $s = 20$, ilustrată în figura 4.4.

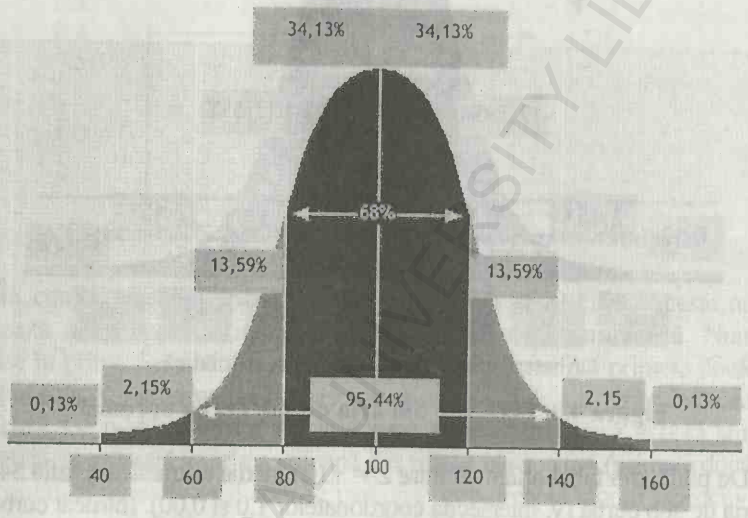


Figura 4.4. Distribuția scorurilor CI pentru un eșantion de 1000 de subiecți

Să presupunem că ne interesează procentul de cazuri cu scoruri CI mai mici decât 115. Calculăm mai întâi scorul Z corespunzător scorului brut 115:

$$Z = \frac{115 - 100}{20} = +0{,}75$$

Din tabelul curbei normale aflăm că aria dintre scorul $Z = +0{,}75$ și media aritmetică reprezintă 27,34% din aria totală. Întrucât aria aflată sub media aritmetică reprezintă 50% din aria totală, procentul de subiecți cu scoruri CI mai mici decât 115 este de 74,34% (27,34% + 50%). Acest rezultat poate fi exprimat și în număr de cazuri, spunând că aproximativ 743 de subiecți din eșantionul considerat (74,34% din 1000) au scoruri CI mai mici decât 115.

Să presupunem acum că ne interesează procentul de cazuri cu scoruri CI mai mici decât 75. Scorul Z corespunzător scorului brut 75 este:

$$Z = \frac{75 - 100}{20} = -1{,}25$$

Pentru a afla aria de sub un scor Z negativ, aria dintre scor şi media aritmetică se scade din 50% (aria aflată la stânga mediei). Din tabelul curbei normale aflăm că aria dintre scorul $Z = -1{,}25$ şi media aritmetică reprezintă 39,44% din aria totală. Astfel, procentul de subiecţi cu scoruri CI mai mici decât 75 este de 10,56% (50% – 39,44%), ceea ce înseamnă că aproximativ 394 de subiecţi (39,44% din 1000) au scoruri CI mai mici decât 75.

Acelaşi model de calcul se utilizează pentru a afla aria situată deasupra unui scor Z pozitiv. Să presupunem că ne interesează procentul de cazuri cu scoruri mai mari decât 150. Ştim că scorul Z corespunzător acestui scor brut este +2,50. Din tabelul curbei normale aflăm că aria dintre scorul $Z = +2{,}50$ şi media aritmetică reprezintă 47,98% din aria totală, astfel încât procentul de subiecţi cu scoruri mai mari decât 150 este de 2,02% (50% – 47,98%). Aceasta înseamnă că aproximativ 20 de subiecţi (2,02% din 1000) au scoruri CI mai mari decât 150.

În general, ariile situate peste sau sub un anumit scor Z se determină conform următoarelor reguli:

1. Pentru a determina aria aflată sub un scor Z negativ sau peste un scor Z pozitiv, aria dintre scorul respectiv şi media aritmetică se scade din 50%.

2. Pentru a determina aria aflată sub un scor Z pozitiv sau peste un scor Z negativ, aria dintre scorul respectiv şi media aritmetică se adună cu 50%.

Acum să vedem cum se determină ariile, respectiv procentele de cazuri dintre două scoruri. Să presupunem că ne interesează procentul de subiecţi cu scoruri CI cuprinse între 95 şi 125. Scorurile Z corespunzătoare acestor scoruri brute sunt:

$$Z_{95} = \frac{95 - 100}{20} = -0{,}25$$

$$Z_{110} = \frac{125 - 100}{20} = +1{,}25$$

Din tabelul curbei normale aflăm că aria dintre scorul $Z = -0{,}25$ şi media aritmetică reprezintă 9,87% din aria totală şi că aria dintre scorul $Z = +1{,}25$ şi media aritmetică reprezintă 39,44% din aria totală. Fiind vorba despre scoruri aflate de o parte şi de alta a mediei, aria dintre scoruri se deter-mină adunând ariile dintre fiecare scor şi media aritmetică. Astfel, procentul de subiecţi cu scoruri CI cuprinse între 95 şi 125 este de 49,31% (9,87% + 39,44%). Aceasta înseamnă că aproximativ 439 de subiecţi au scoruri CI cuprinse între 95 şi 125.

Pentru a determina aria dintre două scoruri aflate de aceeaşi parte a mediei aritmetice, se determină mai întâi ariile dintre fiecare scor şi medie, după care aria mai mică se scade din aria mai mare. Să presupunem că ne interesează procentul de subiecţi cu scoruri CI cuprinse între 115 şi 125. Ştim că scorurile Z corespunzătoare scorurilor brute 115 şi 125 sunt, respectiv, +0,75 şi +1,25. Ştim, de asemenea, că între Z = +0,75 şi media aritmetică se află 27,34% din aria totală şi că între Z = +1,25 şi media aritmetică se află 39,44% din aria totală. Prin urmare, procentul de subiecţi cu scoruri CI cuprinse între 115 şi 125 este de 12,10% (39,44% – 27,34%), ceea ce înseamnă că aproximativ 121 de subiecţi au scoruri CI cuprinse între 115 şi 125. Acelaşi model de calcul se utilizează atunci când ambele scoruri se află sub medie.

4.4.2. Estimarea probabilităţilor

Tabelul curbei normale standard poate fi utilizat pentru a estima probabilitatea ca un caz ales la întâmplare dintr-o distribuţie particulară aproximativ normală să aibă un scor cuprins într-o amplitudine dată de scoruri. Înainte de a considera acest tip de utilizare, să examinăm pe scurt noţiunea de probabilitate.

Pentru a estima probabilitatea producerii unui eveniment, trebuie să definim evenimentele care reprezintă cazuri favorabile. Un **caz favorabil** este un caz în care se produce evenimentul a cărui probabilitate de apariţie dorim să o estimăm sau, pe scurt, un caz ce realizează acel eveniment. Să presupunem că într-o urnă sunt n bile de culori diferite, dintre care exact m sunt albe, şi că ne interesează probabilitatea de a extrage de la prima încercare o bilă albă. Evenimentul fiind apariţia unei bile albe, cazul favorabil este extragerea unei bile albe. Faţă de cazul favorabil, vom spune că extragerea unei bile de orice culoare este un *caz egal posibil*. Avem astfel m cazuri favorabile şi n cazuri egal posibile. Probabilitatea teoretică a unui eveniment E, notată $P(E)$ se defineşte ca raportul dintre numărul m al cazurilor favorabile şi numărul n al cazurilor egal posibile:

$$P(E) = \frac{m}{n}.$$

Pentru ilustrare, să presupunem că în urnă se află 52 de bile de culori diferite, dintre care una singură este albă. Întrucât m = 1 şi n = 52, probabilitatea de a extrage de la prima încercare o bilă albă este 1/52. Această fracţie poate fi exprimată şi ca proporţie, împărţind numărătorul la numitor: (1/52) = 0,0192. Vom spune că apariţia bilei albe la o singură extragere se produce în proporţie de 0,0192. În ştiinţele omului, pro-

babilităţile sunt exprimate în mod obişnuit ca proporţii şi vom urma această convenţie în continuare.

Este important de remarcat că, gândite astfel, probabilităţile au un înţeles precis: pe termen lung, cazurile favorabile se află într-o anumită relaţie proporţională cu numărul total de cazuri. În exemplul nostru, probabilitatea de 0,0192 ca bila albă să apară la o singură extragere înseamnă de fapt că din 10.000 de extrageri a câte unei bile din urna completă, proporţia de extrageri a bilei albe va fi de 0,0192 sau, altfel spus, că din 10.000 de extrageri a câte unei bile din urna completă, bila albă va apărea de 192 de ori, celelalte 9808 extrageri producând bile de alte culori.

Acum, din cele de mai sus ştim că pentru orice distribuţie particulară aproximativ normală, proporţiile prezentate în tabelul curbei normale standard ne dau frecvenţa relativă a cazurilor cu scoruri cuprinse între un anumit scor şi media aritmetică, precum şi că probabilitatea unui eveniment este frecvenţa relativă a cazurilor ce realizează acel eveniment. Prin urmare, proporţiile din tabelul curbei normale standard pot fi interpretate ca probabilităţi şi pot fi folosite pentru a estima probabilitatea de selecţie a unui caz cu un scor cuprins într-o amplitudine dată de scoruri.

Considerând din nou distribuţia variabilei *coeficient de inteligenţă* cu care am lucrat mai sus, să presupunem că ne interesează probabilitatea ca un subiect ales la întâmplare să aibă un scor CI cuprins între 95 şi scorul mediu de 100 (aici, cazul favorabil este selectarea unui subiect al cărui scor se află în amplitudinea de scoruri specificată[1]). Scorul Z corespunzător scorului brut de 95 este –0,25 şi, conform tabelului curbei normale standard, proporţia din arie cuprinsă între scorul $Z = -0,25$ şi media aritmetică este de 0,0987. Această proporţie este probabilitatea căutată. Vom spune că probabilitatea ca un subiect ales la întâmplare să aibă un scor cuprins între 95 şi 100 este de 0,0987 sau, rotunjit, de 0,1 sau de unu la zece.

De notat că pentru estimarea probabilităţilor se utilizează aceleaşi proceduri ilustrate mai sus pentru determinarea procentelor de cazuri, diferenţa fiind aceea că proporţiile din tabelul curbei normale standard sunt interpretate ca probabilităţi.

Să mai notăm că, întrucât în distribuţia normală standard cele mai multe scoruri sunt grupate în jurul mediei aritmetice, frecvenţa acestora

---

[1] Determinarea probabilităţii căutate cu ajutorul formulei de calcul pentru probabilităţi ar conduce la construirea unei fracţii care să aibă drept numărător numărul de subiecţi ale căror scoruri se află în amplitudinea specificată şi drept numitor numărul total de subiecţi.

scăzând pe măsură ce ne îndepărtăm de medie, dacă vom selecta la întâmplare un număr de cazuri dintr-o distribuție particulară aproximativ normală, vom selecta mai des cazuri care au scoruri apropiate de media aritmetică și mai rar cazuri care au scoruri aflate mult sub sau peste medie.

BCU IASI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

GLOSAR

Curbă normală: grafic al unei distribuţii normale; acest grafic are formă de clopot cu ambele extremităţi extinse la infinit.

Curba normală standard: graficul corespunzător distribuţiei normale standard.

Distribuţie normală: distribuţie teoretică de scoruri, unimodală, simetrică şi continuă.

Distribuţia normală standard: distribuţie normală particulară în care media aritmetică egală cu 0 şi abaterea standard este egală cu unitatea.

Scoruri standard (scoruri *Z*): scoruri care folosesc abaterea standard ca unitate de măsură şi descriu poziţia relativă a unui scor individual în raport cu întreaga mulţime de scoruri din care face parte.

Tabelul curbei normale standard: tabel în care sunt prezentate sub formă de proporţii ariile dintre un scor *Z* şi media aritmetică a distribuţiei normale standard.

Variabila normală standard: variabila corespunzătoare distribuţiei normale standard.

BCU IASI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

5. EŞANTIONAREA ŞI DISTRIBUŢII DE EŞANTIONARE

După cum am arătat în capitolul 1, cercetătorii folosesc *statistici inferenţiale* pentru a trage concluzii despre caracteristicile unei populaţii pe baza caracteristicilor corespunzătoare ale unui eşantion din acea populaţie. Folosirea adecvată a acestor tehnici statistice cere ca eşantioanele să fie selectate aleatoriu[1] din populaţiile de referinţă. În cazul cel mai general, un eşantion este **aleatoriu** dacă fiecare caz din populaţia de referinţă are aceeaşi probabilitate de a fi selectat în eşantion cu a oricărui alt caz şi selectarea fiecărui caz este independentă de selectarea tuturor celorlalte cazuri. Dacă populaţia are, să zicem, 1000 de membri, atunci fiecare membru trebuie să aibă o probabilitate de 1/1000 de a fi selectat. Supoziţia fundamentală a statisticilor inferenţiale este aceea că investigarea unui eşantion aleatoriu dintr-o populaţie conduce la rezultate apropiate de cele care ar fi obţinute dacă ar fi investigată întreaga populaţie şi, după cum vom vedea, noţiunea de *distribuţie de eşantionare* furnizează o măsură a acestei apropieri. Eşantioanele nealeatorii pot fi foarte uşor alcătuite, dar nu permit formularea unor concluzii despre populaţiile respective, ci doar despre eşantioane.

De notat că, în acest context, „aleatoriu" este un termen tehnic, care nu are acelaşi înţeles cu termenul „întâmplător", aşa cum este utilizat acesta în limbajul obişnuit. Un eşantion aleatoriu nu este alcătuit la întâmplare, ci printr-un proces bine determinat şi precis de selecţie. De pildă, intervievarea unor persoane pe care se întâmplă să le întâlnim într-un supermagazin nu constituie o eşantionare aleatorie. Selecţia aleatorie este o condiţie necesară pentru obţinerea unor eşantioane care să ofere imagini cât mai precise ale populaţiilor de referinţă sau, altfel spus, a unor eşantioane reprezentative pentru populaţiile de referinţă, dar nici măcar cele mai sofisticate proceduri de selecţie aleatorie nu garantează 100% că eşantionul respectiv este o reprezentare *exactă* a populaţiei din care a fost alcătuit. Totuşi, probabilitatea ca eşantioanele aleatorii să fie reprezentative pentru populaţiile de referinţă este foarte mare, iar tehnicile statistice permit determinarea precisă a probabilităţilor erorilor de reprezentativitate.

---

[1] Cuvântul „aleatoriu" provine din limba latină, în care substantivul „ălea" înseamnă *joc cu zaruri* sau *şansă*, iar adjectivul „ăleatörius" înseamnă *de joc*, cu referire la jocurile de noroc. După cum se ştie, aruncarea cu zarul este experimentul tipic luat în considerare în teoria probabilităţilor.

Înainte de a prezenta rolul eşantionării în statisticile inferenţiale, vom prezenta pe scurt câteva dintre cele mai utilizate procedee de eşantionare aleatorie.

5.1. PROCEDEE DE EŞANTIONARE ALEATORIE

Procedeul fundamental de eşantionare aleatorie se numeşte **eşantionare aleatorie simplă**. În procesul de selecţie a unui eşantion aleatoriu simplu, fiecare caz din populaţia de referinţă are o probabilitate egală de a fi inclus în eşantion, iar selectarea fiecărui caz este independentă de selectarea tuturor celorlalte cazuri. Procesul de selecţie aleatorie simplă se poate baza pe diferite tipuri de operaţii. În mod tipic, se folosesc tabele cu numere selectate aleatoriu de un computer. Un exemplu de astfel de tabel este dat în Anexa B. Aceste tabele conţin numere alcătuite din cinci cifre, de la 0 la 9. Pentru a folosi un astfel de tabel, se atribuie fiecărui caz din populaţia de referinţă un număr unic de identificare, după care se aleg la întâmplare un rând şi o coloană din tabel şi, pornind de la acel punct la dreapta sau la stânga, în sus sau în jos, se citesc numerele, selectând în eşantion cazurile ale căror numere de identificare corespund cu numerele citite în tabel. Selecţia se opreşte atunci când s-a ajuns la dimensiunea dorită a eşantionului. Pentru ilustrare, să presupunem că dorim să alcătuim un eşantion de dimensiune $n = 20$ dintr-o populaţie de dimensiune $N = 600$. Mai întâi, numerotăm membrii populaţiei într-o ordine oarecare 001, 002, ..., 600. Pentru a forma eşantionul, considerăm doar ultimele trei cifre ale numerelor din tabel şi, evident, ignorăm numerele mai mari de 600. Alegem la întâmplare un rând şi o coloană şi începem selecţia pornind de la numărul respectiv şi mergând, de pildă, în jos pe coloana aleasă, până când obţinem 20 de numere. Dacă un număr de identificare este selectat mai mult decât o singură dată, se ignoră repetarea şi se trece la următorul număr din secvenţă[2]. Eşantionul va fi alcătuit din acei membri ai populaţiei ale căror numere de identificare au fost astfel selectate.

---

[2] De notat că ignorarea repetărilor implică *selecţia fără înlocuire*, în care, după ce un membru din populaţia de referinţă a fost selectat, el este eliminat din populaţie. În selecţia fără înlocuire, probabilitatea de selecţie creşte pe măsura efectuării selecţiei, ca urmare a micşorării treptate a dimensiunii populaţiei cu câte o unitate. De pildă, având o populaţie de 1000 membri, probabilităţile de selecţie fără înlocuire vor fi 1/1000, 1/999, 1/998 ş.a.m.d. Ca atare, riguros vorbind, ignorarea repetărilor afectează caracterul aleatoriu al procesului de selecţie. Totuşi, dacă dimensiunea eşantionului este relativ mică, probabilitatea de a selecta acelaşi membru din populaţia de referinţă de două ori şi de a neglija astfel repetările este foarte mică. Prin contrast, în *selecţia cu înlocuire*, după ce un membru din populaţia de referinţă a fost selectat, el nu este eliminat din populaţie, astfel încât probabilitatea de selecţie rămâne constantă pe tot parcursul selecţiei.

Statisticienii atrag atenţia asupra necesităţii de a schimba des tabelul cu numere aleatorii, dacă cercetătorul foloseşte des procedeul menţionat: „Natura umană este în aşa fel, încât fiecare dintre noi are tendinţa de a porni aproximativ din acelaşi loc şi de a parcurge repetat aproximativ aceeaşi cale. De aceea, folosirea repetată a aceluiaşi tabel poate să conducă la selectarea aceluiaşi şir de numere"[3].

Acum să vedem cum poate fi folosit tabelul cu numere aleatorii pentru a repartiza aleatoriu un număr de subiecţi în grupuri. Să presupunem că avem 15 subiecţi şi, în vederea unui experiment, dorim să alcătuim trei grupuri cu câte cinci subiecţi în fiecare grup. Pentru aceasta, alegem la întâmplare un rând şi o coloană şi, urmând o anumită direcţie, atribuim un număr fiecărui subiect, considerând doar ultimele două cifre ale numerelor din tabel. Apoi, considerăm subiecţii în ordinea crescătoare a numerelor atribuite şi repartizăm primii cinci subiecţi în grupul 1, următorii cinci subiecţi în grupul 2 şi ultimii cinci subiecţi în grupul 3. Tabelul următor prezintă o posibilă repartizare de felul menţionat:

Subiecţi	Numere atribuite	Repartizarea în grupuri
A	10	1
B	37	2
C	08	1
D	09	1
E	12	1
F	66	2
G	31	2
H	85	3
I	63	2
J	73	2
K	98	3
L	11	1
M	83	2
N	88	3
O	99	3

Evident, procedeul poate fi folosit pentru orice număr de grupuri într-un experiment.

[3] G. Keller, B. Warrack, 1991.

Procedura de eşantionare aleatorie simplă devine incomodă atunci când dimensiunea populaţiei de referinţă este foarte mare (10000, de pildă). Într-un astfel de caz se poate folosi **eşantionarea sistematică**, numită şi *selecţie mecanică*. Mai întâi, se stabileşte o fracţie de selecţie (fracţie de eşan-tionare, pas de numărare): $K = N/n$, în care N este numărul total de cazuri din populaţia de referinţă, iar n este dimensiunea dorită a eşantionului. De pildă, dacă $N = 10000$ şi $n = 300$, $K = 34$ (K se rotunjeşte întotdeauna până la un număr întreg). După ce s-a stabilit pasul de numărare, se listează la întâmplare membrii populaţiei de referinţă şi se alege la întâmplare, eventual prin tragere la sorţi, un caz din primele K cazuri, care se include în eşantion, şi apoi se alege fiecare al K-lea caz pentru a fi inclus în eşantion până se ajunge la dimensiunea dorită a eşantionului. În exemplul nostru, dacă din primele 34 de cazuri a fost ales la întâmplare cazul cu numărul 5, atunci se vor include în eşantion următoarele cazuri: 5, 39, 73, 107, ş.a.m.d. până la $n = 300$.

De notat că în cazul eşantionării sistematice, selecţia nu mai este independentă, deoarece, cu excepţia primului caz, fiecare caz selectat depinde de numărul de ordine al cazului precedent. De aceea, acest procedeu este considerat ca fiind cvasialeatoriu. Caracterul aleatoriu este asigurat prin alcătuirea întâmplătoare a listelor din care sunt selectate cazurile.

Un al treilea procedeu de eşantionare, **eşantionarea stratificată**, conduce la creşterea cantităţii de informaţii despre populaţie. Pentru a alcătui un eşantion aleatoriu stratificat, se clasifică populaţia de referinţă după criterii relevante şi se alcătuiesc eşantioane aleatorii simple din fiecare clasă (strat). De pildă, pot fi folosite criterii precum sexul, vârsta sau ocupaţia.

Cititorul interesat de detalii privitoare la procedurile de eşantionare descrise sumar mai sus sau/şi de alte procedee de eşantionare poate consulta cărţi despre eşantionare sau manuale de metodologie a cercetării psihologice.

5.2. DISTRIBUŢIA DE EŞANTIONARE

Scopul principal al statisticilor inferenţiale este generalizarea unor caracteristici ale eşantionului la populaţia din care a fost alcătuit. Strategia generală a acestor tehnici statistice constă în trecerea de la distribuţia unui eşantion la distribuţia unei populaţii prin intermediul noţiunii de *distribuţie de eşantionare*. Ştim că informaţia necesară pentru caracterizarea adecvată a unei distribuţii include forma distribuţiei, unele mărimi ale tendinţei centrale şi unele mărimi ale dispersiei. Distribuţia unui eşantion este

empirică (există în realitate) şi cunoscută, eşantionul fiind alcătuit de cercetător, în timp ce distribuţia populaţiei este empirică, dar este necunoscută. După cum vom vedea, distribuţia de eşantionare este nonempirică (teoretică – nu poate fi obţinută niciodată în realitate de către cercetător), iar pe baza legilor de probabilitate pot fi deduse forma, tendinţa centrală şi dispersia acestei distribuţii, astfel încât proprietăţile sale pot fi exact cunoscute. Să explicăm.

În capitolul anterior am folosit distribuţia normală standard pentru a estima probabilitatea ca un caz ales la întâmplare dintr-o distribuţie particulară aproximativ normală să aibă un scor cuprins într-o amplitudine dată de scoruri. În cele ce urmează vom considera mediile aritmetice, nu scorurile individuale, şi vom folosi distribuţia normală standard (distribuţia *Z*) pentru a caracteriza distribuţia mediilor aritmetice ($\bar{X}$) pentru toate eşantioanele posibile de dimensiune dată (*n*), care pot fi obţinute aleatoriu dintr-o populaţie. Cu alte cuvinte, vom considera că *media aritmetică* este ea însăşi o variabilă, ale cărei scoruri sunt mediile aritmetice ale tuturor eşantioanelor aleatorii posibile de dimensiune constantă *n* dintr-o populaţie.

Să presupunem că ne interesează media aritmetică a vârstelor dintr-o populaţie de dimensiune comparabilă cu populaţia României. Selectăm un eşantion aleatoriu de 100 de persoane din această populaţie şi înregistrăm vârstele pentru acest eşantion. Evident, ceea ce am obţinut este distribuţia vârstelor pentru eşantionul considerat, pentru care putem calcula media aritmetică. Acum, să presupunem că am selectat (cu înlocuire) *toate eşantioanele posibile* de dimensiune 100 din populaţia respectivă şi că am calculat media aritmetică pentru fiecare eşantion. Rezultatele pe care, în principiu, le-am obţine în acest fel constituie distribuţia mediilor aritmetice pentru toate eşantioanele posibile de dimensiune 100 din populaţia de referinţă. Această distribuţie este numită *distribuţia de eşantionare a mediilor aritmetice* ale tuturor eşantioanelor aleatorii de dimensiune 100 din populaţia de referinţă. În general, **distribuţia de eşantionare a mediilor aritmetice** se defineşte ca distribuţia mediilor aritmetice ale tuturor eşantioanelor aleatorii de dimensiune constantă *n* din populaţia de referinţă. În mod similar, se definesc distribuţiile de eşantionare pentru alte mărimi statistice (proporţii, coeficienţi de corelaţie etc.), pe care le vom considera în unele dintre capitolele care urmează. În continuare, ne vom concentra atenţia asupra distribuţiei de eşantionare a mediilor aritmetice.

Ca şi distribuţiile de frecvenţe considerate până acum, distribuţia de eşantionare a mediilor aritmetice (şi cele ale celorlalte mărimi statistice) are (1) o formă, (2) o medie aritmetică şi (3) o abatere standard. Pentru media

aritmetică şi abaterea standard a distribuţiei de eşantionare a mediilor aritmetice vom folosi, respectiv, simbolurile $\mu_{\bar{X}}$ şi $\sigma_{\bar{X}}$.

Cei trei parametri menţionaţi ai distribuţiei de eşantionare a mediilor aritmetice sunt daţi de următoarea teoremă, numită **teorema limitei centrale:**

Dacă se alcătuiesc toate eşantioanele posibile de dimensiune n dintr-o populaţie cu media aritmetică μ şi abaterea standard σ, atunci distribuţia de eşantionare a mediilor aritmetice ale acestor eşantioane are următoarele trei proprietăţi:

1. *Media sa aritmetică, $\mu_{\bar{X}}$, este egală cu media aritmetică a populaţiei, μ.*
2. *Abaterea sa standard, $\sigma_{\bar{X}}$, este egală cu $\sigma/\sqrt{n}$.*
3. *Cu cât n este mai mare, cu atât forma sa aproximează mai bine normalitatea, indiferent de forma distribuţiei populaţiei.*

Demonstrarea acestei teoreme depăşeşte cadrul propus pentru lucrarea de faţă. Pentru concizia exprimării, în loc de „distribuţia de eşantionare a mediilor aritmetice" vom scrie în continuare „distribuţia de eşantionare a $\bar{X}$".

Teorema limitei centrale arată că, indiferent de forma distribuţiei unei variabile într-o populaţie, distribuţia de eşantionare a $\bar{X}$ va fi aproximativ normală pentru eşantioane suficient de mari. De pildă, dacă lucrăm cu o variabilă care prezintă o distribuţie asimetrică, precum venitul, putem să presupunem că distribuţia de eşantionare a $\bar{X}$ este aproximativ normală pentru eşantioane cu $n \geq 100$, având media aritmetică egală cu cea a populaţiei şi abaterea standard egală cu $\sigma/\sqrt{n}$. Astfel, teorema limitei centrale elimină constrângerea normalităţii pentru populaţii. Dacă distribuţia unei variabile este aproximativ normală, atunci distribuţia de eşantionare a $\bar{X}$ va fi aproximativ normală chiar şi pentru valori mai mici ale lui *n*. În fine, teoretic vorbind, dacă distribuţia unei variabile este riguros normală, atunci distribuţia de eşantionare a $\bar{X}$ va fi normală indiferent de dimensiunea eşantionului.

5.3. ESTIMAREA PROBABILITĂȚILOR

Teorema limitei centrale poate fi utilizată pentru a estima probabilitatea ca media aritmetică a unui eșantion de dimensiune dată, ales la întâmplare dintr-o populație, să aibă o valoare cuprinsă într-o amplitudine dată de valori. Pentru ilustrare, să considerăm o populație cu media aritmetică a unei caracteristici aproximativ normale $\mu = 117$ și $\sigma = 14$. Să presupunem că ne interesează probabilitatea ca un eșantion aleatoriu cu $n = 36$ selectat din această populație să aibă media aritmetică a caracteristicii respective cuprinsă între 115 și 120. Întrucât variabila considerată este aproximativ normală, conform punctului 3 al teoremei limitei centrale, distribuția de eșantionare a $\overline{X}$ aproximează normalitatea pentru $n = 36$. Conform punctelor 2 și 3 ale acestei teoreme, avem:

$$\mu_{\overline{X}} = 117$$

$$\sigma_{\overline{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{14}{\sqrt{36}} = 2{,}34$$

Aici, valorile 115 și 120 sunt medii aritmetice. Scorurile Z corespunzătoare acestor valori se calculează cu ajutorul următoarei formule:

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu_{\overline{X}}}{\sigma_{\overline{X}}}$$

În exemplul nostru, avem:

$$Z_{115} = \frac{115 - 117}{2{,}34} = -0{,}85$$

$$Z_{120} = \frac{120 - 117}{2{,}34} = 0{,}90$$

Din tabelul curbei normale aflăm că probabilitatea corespunzătoare scorului $Z = -0{,}85$ este 0,3023, iar cea corespunzătoare scorului $Z = +1{,}25$ este 0,3944. Ca atare, probabilitatea ca un eșantion cu $n = 36$ să aibă media aritmetică între 115 și 120 este de 0,6967.

5.4. STRATEGIA INFERENȚIALĂ

În statisticile inferențiale, mărimile statistice pentru populații sunt numite **parametri** și, prin contrast, mărimile statistice pentru eșantioane

sunt numite pur şi simplu **statistici**. Figura 5.1 ilustrează strategia generală a statisticilor inferenţiale[4], pe care o vom folosi în capitolele care urmează.

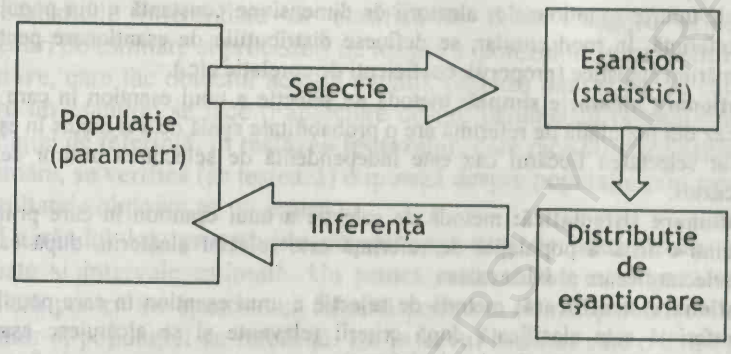


Figura 5.1. Strategia inferenţială

Astfel, în general, în statisticile inferenţiale avem o populaţie ai cărei parametri se doresc a fi determinaţi. Pentru aceasta, selectăm un eşantion aleatoriu din acea populaţie şi calculăm statisticile care reflectă parametrii corespunzători, după care, pe baza distribuţiilor de eşantionare ale acelor statistici şi a legilor de probabilitate, inferăm asupra parametrilor populaţiei.

[4] După Hinkle, Wiersma şi Jurs, 1988.

GLOSAR

Distribuția de eșantionare a mediilor aritmetice: distribuția mediilor aritmetice ale tuturor eșantioanelor aleatorii de dimensiune constantă *n* din populația de referință. În mod similar, se definesc distribuțiile de eșantionare pentru alte mărimi statistice (proporții, coeficienți de corelație etc.).

Eșantionare aleatorie simplă: metodă de selecție a unui eșantion în care fiecare caz din populația de referință are o probabilitate egală de a fi inclus în eșantion, iar selectarea fiecărui caz este independentă de selectarea tuturor celorlalte cazuri.

Eșantionare sistematică: metodă de selecție a unui eșantion în care primul caz dintr-o listă a populației de referință este selectat aleatoriu, după care este selectat fiecare al *k*-lea caz.

Eșantionare stratificată: metodă de selecție a unui eșantion în care populația de referință este clasificată după criterii relevante și se alcătuiesc eșantioane aleatorii simple din fiecare clasă (strat).

Parametri: mărimi statistice pentru populații; prin contrast, mărimile statistice pentru eșantioane sunt numite **statistici**.

Teorema limitei centrale: teoremă care specifică media aritmetică, abaterea standard și forma distribuției de eșantionare a mediilor aritmetice.

BCU IASI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

6. PROCEDURI DE ESTIMARE STATISTICĂ

Statisticile inferențiale se clasifică în două categorii principale: proceduri de estimare și proceduri de testare a ipotezelor. În **procedurile de estimare**, care fac obiectul acestui capitol, pe baza unei statistici calculate pentru un eșantion se face o apreciere despre parametrul corespunzător al populației de referință. În **testarea ipotezelor**, care face obiectul capitolelor următoare, se verifică (se testează) o ipoteză despre populație prin raportare la rezultatele obținute pe un eșantion.

La rândul lor, procedurile de estimare sunt de două tipuri: puncte estimate și intervale estimate. Un **punct estimat** este o singură valoare calculată pentru un eșantion și folosită pentru a estima parametrul corespunzător al populației de referință. Un **interval estimat** este o amplitudine de valori în care este probabil să se afle un parametru al populației de interes. Luând drept exemplu sondajele electorale, a spune că 38% din electorat va vota pentru candidatul *X* înseamnă a raporta un punct estimat, în timp ce a spune că între 35% și 42% din electorat va vota pentru candidatul *X* înseamnă a raporta un interval estimat. În ambele tipuri de proceduri, statisticile calculate pentru eșantioane servesc drept **estimatori**. De pildă, media aritmetică pentru un eșantion este un estimator al mediei aritmetice a populației de referință.

6.1. CARACTERISTICI ALE ESTIMATORILOR

Un estimator trebuie să satisfacă două condiții: să fie nedistorsionat și relativ eficient. Se spune că un estimator este **nedistorsionat** dacă media aritmetică a distribuției sale de eșantionare este egală cu media aritmetică a populației de referință. Conform teoremei limitei centrale, mediile aritmetice ale eșantioanelor satisfac această condiție: media aritmetică a distribuției de eșantionare a mediilor aritmetice, $\mu_{\bar{X}}$, este egală cu media aritmetică a populației, μ. Statisticienii au demonstrat că și proporțiile eșantioanelor, p, sunt nedistorsionate, întrucât media aritmetică a distribuției de eșantionare a proporțiilor pentru eșantioane, μ_p, este egală cu proporția populației, P. Prin contrast, un estimator este **distorsionat** dacă media aritmetică a distribuției sale de eșantionare este diferită de media aritmetică a populației. De pildă, abaterea standard a unui eșantion s este un estimator distorsionat al abaterii standard a populației: de regulă, dispersia unui eșantion este mai mică decât cea a populației de referință, astfel că s

tinde să subestimeze pe σ. După cum am menționat în capitolul 3, această distorsiune poate fi corectată.

Un estimator nedistorsionat permite, între altele, determinarea probabilității ca o mărime statistică a unui eșantion să se afle la o anumită distanță față de parametrul corespunzător pe care încercăm să-l estimăm. Pentru ilustrare, să presupunem că ne interesează venitul mediu al unei populații. Pentru aceasta, alcătuim un eșantion aleatoriu cu $n = 500$ și calculăm media aritmetică pentru acest eșantion. Să presupunem că am găsit $\overline{X} = 5.000.000$. După cum am arătat, variabila *venit* prezintă o distribuție asimetrică. Cu toate acestea, conform teoremei limitei centrale, distribuția de eșantionare a $\overline{X}$ pentru eșantioane mari ($n \geq 100$) aproximează normalitatea, având media aritmetică, $\mu_{\overline{X}}$, egală cu media aritmetică a populației, μ. Știm că toate curbele normale conțin aproximativ 68% din cazuri între $\pm 1Z$, 95% din cazuri între $\pm 2Z$ și 98% din cazuri între $\pm 3Z$ față de medie. Aici, cazurile sunt medii aritmetice ale eșantioanelor, astfel încât există o probabilitate mare (aproximativ 68 de șanse din 100) ca media aritmetică a eșantionului considerat, 5.000.000, să se afle între $\pm 1Z$, o probabilitate foarte mare (95 din 100) ca această medie să se afle între $\pm 2\ Z$ și o probabilitate extrem de mare (98 din 100) ca această medie să se afle între $\pm 3\ Z$ față de mediadia aritmetică a distribuției de eșantionare $\mu_{\overline{X}}$, care are aceeași valoare cu μ :

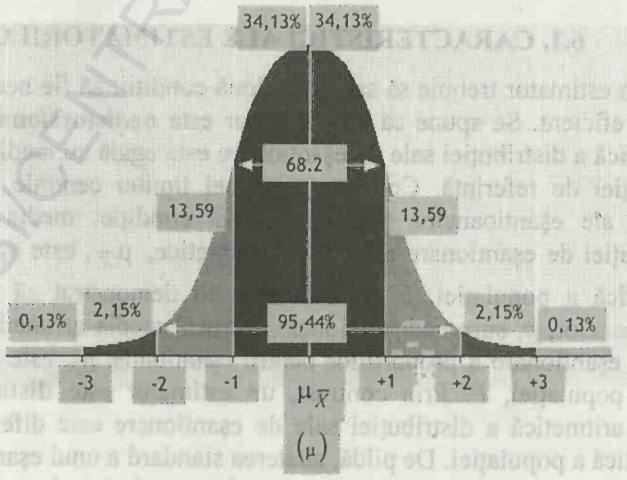


Figura 6.1. Procente din aria de sub curba normală

De remarcat că în aproximativ 2% din cazuri, media aritmetică de 5.000.000 se află la mai mult de $\pm 3Z$ față de media aritmetică a distribuției de eșantionare. Practic, putem spune că media aritmetică de 5.000.000 nu se află în acea „minoritate".

Cea de-a doua condiție pe care trebuie să o satisfacă un estimator, eficiența, este legată de dispersie. Un estimator este cu atât mai **eficient** cu cât distribuția de eșantionare este mai grupată în jurul mediei sale aritmetice sau, altfel spus, cu cât este mai mică abaterea standard a distribuției de eșantionare. Să considerăm mediile aritmetice ale eșantioanelor. Din teorema limitei centrale, știm că abaterea standard a distribuției de eșantionare a mediilor aritmetice ale eșantioanelor, $\sigma_{\bar{X}}$, este egală cu $\sigma/\sqrt{n}$, deci $\sigma_{\bar{X}}$ este invers proporțională cu n: cu cât dimensiunea eșantionului este mai mare, cu atât este mai mică $\sigma_{\bar{X}}$. Ca atare, eficiența mediei aritmetice ca estimator poate fi îmbunătățită ($=\sigma_{\bar{X}}$ poate fi micșorată) prin mărirea dimensiunii eșantionului. Pentru ilustrare, să considerăm următorul exemplu:

Eșantionul 1	Eșantionul 2
$\bar{X} = 5.000.000$	$\bar{X} = 5.000.000$
$n_1 = 100$	$n_2 = 1000$

Să presupunem că abaterea standard a populației, σ, este de 275.000 (evident, valoarea lui σ este rareori cunoscută în realitate). În privința primului eșantion, abaterea standard a distribuției de eșantionare a mediilor aritmetice ale tuturor eșantioanelor cu $n = 100$ este $275.000/\sqrt{100} = 27.500$. În privința celui de-al doilea eșantion, abaterea standard a distribuției de eșantionare a mediilor aritmetice ale tuturor eșantioanelor cu $n = 1000$ este considerabil mai mică: $275.000/\sqrt{1000} = 8697$. Cea de-a doua distribuție de eșantionare este mult mai grupată decât prima distribuție[1].

Rezumând, întrucât $\sigma_{\bar{X}}$ este invers proporțională cu n, cu cât eșantionul este mai mare, cu atât distribuția de eșantionare este mai grupată și eficiența estimatorului este mai mare[2].

---

[1] Distribuția 2 conține aproximativ 68% din mediile aritmetice ale tuturor eșantioanelor posibile între ±8697 față de $\mu_{\bar{X}}$, în timp ce distribuția 1 conține aproximativ 68% din mediile aritmetice într-un interval mult mai larg: ±27.500.

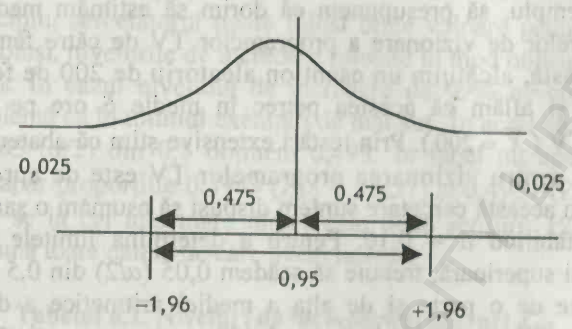
[2] Aceste relații precizează ideea intuitivă că putem avea mai multă încredere în rezultatele obținute pe eșantioane mari decât în cele obținute pe eșantioane mici, evident, cu condiția ca și unele și altele să fie selectate aleatoriu.

6.2. ESTIMAREA MEDIEI ARITMETICE CÂND σ ESTE CUNOSCUT

Atunci când se estimează un punct, se alcătuieşte un eşantion aleatoriu, se calculează o medie aritmetică sau o proporţie şi se estimează că valoarea parametrului respectiv este egală cu valoarea calculată pentru eşantion. În acest tip de estimare, se ţine cont că eficienţa estimatorului este direct proporţională cu dimensiunea eşantionului, ceea ce înseamnă că probabilitatea ca estimatorul să fie aproximativ egal cu parametrul corespunzător este cu atât mai mare cu cât dimensiunea eşantionului este mai mare.

Procedura de estimare a intervalelor este relativ mai complicată, dar este mai sigură, în sensul că, atunci când se estimează un interval, probabilitatea ca în acel interval să se afle parametrul de interes este mai mare şi poate fi stabilită cu precizie.

Fie o populaţie cu media aritmetică μ şi cu abaterea standard σ. Selectăm aleatoriu un eşantion de dimensiune n din această populaţie şi calculăm media aritmetică pentru eşantion, $\overline{X}$. Conform teoremei limitei centrale, distribuţia de eşantionare a mediilor aritmetice ale tuturor eşantioanelor posibile de dimensiune n din populaţia de referinţă este aproximativ normală, cu media aritmetică egală cu cea a populaţiei de referinţă şi cu abaterea standard egală cu $\sigma/\sqrt{n}$. Pe baza caracteristicilor distribuţiei de eşantionare şi a tabelului distribuţiei normale standard putem formula enunţuri de probabilitate despre mediile aritmetice ale eşantioanelor. De pildă, din tabel aflăm că proporţia de cazuri (medii aritmetice ale eşantioanelor) cuprinse între $Z = -1{,}96$ şi media aritmetică este de 0,475. Întrucât curba este simetrică, proporţia de cazuri cuprinse între $Z = +1{,}96$ şi media aritmetică este tot de 0,475. Astfel, proporţia de cazuri cuprinse între $\pm 1{,}96$ abateri standard faţă de medie este de 0,95, iar proporţia de cazuri aflate sub $-1{,}96$ şi peste $+1{,}96$ abateri standard faţă de medie este de 0,05 (0,025 + 0,025):

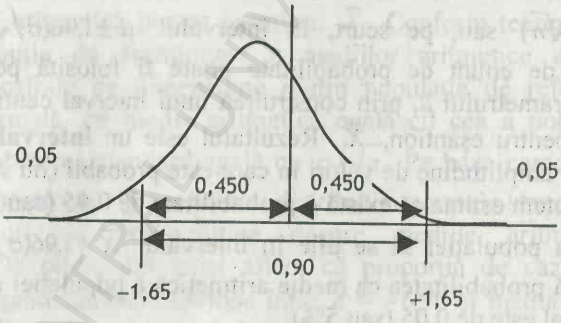


Acelaşi lucru ca mai sus poate fi exprimat spunând că 95% din mediile aritmetice ale eşantioanelor se află în intervalul dintre $\mu - 1{,}96(\sigma/\sqrt{n})$ şi $\mu + 1{,}96(\sigma/\sqrt{n})$ sau, pe scurt, în intervalul $\mu \pm 1{,}96(\sigma/\sqrt{n})$. Structura acestui tip de enunţ de probabilitate poate fi folosită pentru a estima valoarea parametrului μ, prin construirea unui interval centrat pe valoarea cunoscută pentru eşantion, $\overline{X}$. Rezultatul este un **interval de încredere estimat** – o amplitudine de valori în care este probabil (nu sigur) să se afle μ. Astfel, putem estima că există o probabilitate de 0,95 (sau 95%) ca media aritmetică a populaţiei să se afle în intervalul $\overline{X} \pm 1{,}96(\sigma/\sqrt{n})$, ceea ce înseamnă că probabilitatea ca media aritmetică a populaţiei să nu se afle în acest interval este de 0,05 (sau 5%).

Probabilitatea ca media aritmetică a populaţiei să nu se afle în intervalul estimat sau, altfel spus, probabilitatea de eroare a estimării se numeşte **nivel de semnificaţie** sau **nivel alfa** (α), iar probabilitatea ca intervalul estimat să conţină media aritmetică a populaţiei se numeşte **nivel de încredere**. După cum reiese şi din cele de mai sus, nivelul de încredere este complementarul nivelului alfa, fiind egal cu $1 - \alpha$ sau, în procente, cu $(1 - \alpha) \times 100$. A stabili, de pildă, că $\alpha = 0{,}05$ înseamnă acelaşi lucru cu a spune că nivelul de încredere este de 95%. Întrucât probabilitatea de eroare este împărţită în mod egal în extremitatea inferioară şi cea superioară a distribuţiei de eşantionare, stabilindu-se astfel limita inferioară şi limita inferioară de încredere, vom nota scorul Z corespunzător nivelului α ales cu $Z_{\alpha 2}$. Astfel, în cazul în care σ este cunoscut, formula de construire a unui interval de încredere estimat (*IE*) bazat pe media aritmetică a unui eşantion este următoarea:

Formula 6.1. $IE = \overline{X} \pm Z_{\alpha/2}(\sigma/\sqrt{n})$

Ca exemplu, să presupunem că dorim să estimăm media aritmetică zilnică a orelor de vizionare a programelor TV de către femeile casnice. Pentru aceasta, alcătuim un eşantion aleatoriu de 200 de femei casnice (n = 200) şi aflăm că acestea petrec în medie 6 ore pe zi vizionând programe TV ($\overline{X} = 200$). Prin testări extensive ştim că abaterea standard a populaţiei pentru vizionarea programelor TV este de aproximativ 0,7 ($\sigma = 0,7$). În această cercetare suntem dispuşi să asumăm o şansă de a greşi de 10%, stabilind α = 0,10. Pentru a determina limitele de încredere inferioară şi superioară, trebuie să scădem 0,05 ($\alpha/2$) din 0,5 (proporţia de cazuri aflate de o parte şi de alta a mediei aritmetice a distribuţiei de eşantionare). Rezultatul scăderii este 0,450, ceea ce reprezintă proporţia de cazuri dintre o limită de încredere şi medie:



Astfel, pentru α = 0,10 trebuie să căutăm proporţia 0,4500 în tabelul distribuţiei normale standard. Găsim însă o proporţie de 0,4495, corespunzătoare scorului $Z_{\alpha/2} = \pm 1,64$ şi o proporţie de 0,4505, corespunzătoare scorului $Z_{\alpha/2} = \pm 1,65$. Scorul $Z_{\alpha/2}$ pe care îl căutăm se află undeva între aceste două scoruri. În aceste condiţii, se ia cel mai mare dintre cele două scoruri: ±1,65. În acest fel, intervalul de încredere va fi cel mai mare posibil în circumstanţele date. Prin urmare, vom avea:

$$IE = \overline{X} \pm Z_{\alpha/2}(\sigma/\sqrt{n}) = 6 \pm 1,65(0,7/\sqrt{200}) = 6 \pm 1,65(0,7/14,14) =$$

$$= 6 \pm 1,65 \cdot 0,0495 = 6 \pm 0,08$$

Pe baza mediei aritmetice a eşantionului, estimăm că femeile casnice petrec în medie între 5,92 (6 – 0,08) şi 6,08 (6 + 0,08) ore pe zi vizionând programe TV. O altă modalitate de a enunţa acest interval este $5,92 < \mu < 6,08$.

Această estimare are o şansă de 10% de a fi greşită, adică de a nu conţine media aritmetică a populaţiei.

În principiu, cercetătorul poate folosi orice valoare pentru nivelul de încredere. Totuşi, nivelurile de încredere folosite în mod obişnuit sunt 90%, 95% şi 99%. În cazul nivelului de încredere de 99% ne confruntăm cu aceeaşi problemă ca în ultimul exemplu de mai sus. În acest caz, $\alpha = 0{,}01$ şi scăzând 0,005 ($\alpha/2$) din 0,5 obţinem 0,495. În tabel nu apare proporţia 0,4950, dar apar proporţiile 0,4949 ($Z_{\alpha/2} = \pm 2{,}57$) şi 0,4951 ($Z_{\alpha/2} = \pm 2{,}57$). Ca mai sus, se ia cel mai mare dintre cele două scoruri: ±2,58. Tabelul următor rezumă toate datele de care avem nevoie:

Tabelul 6.1. Niveluri de încredere şi scoruri $Z_{\alpha/2}$

Nivelul de încredere $(1 - \alpha) \times 100$	α	$\alpha/2$	$Z_{\alpha/2}$
90%	0,10	0,050	±1,65
95%	0,05	0,025	±1,96
99%	0,01	0,005	±2,58

6.3. ESTIMAREA MEDIEI ARITMETICE CÂND σ ESTE NECUNOSCUT. DISTRIBUŢIA *t*-STUDENT

În aproape toate situaţiile reale de cercetare, valoarea abaterii standard a populaţiei este necunoscută. Se disting aici două cazuri: cazul în care dimensiunea eşantionului este relativ mare, ceea ce înseamnă eşantioane cu $n \geq 30$, şi cazul $n < 30$.

În cazul eşantioanelor cu $n \geq 30$, σ se poate estima prin s (abaterea standard a eşantionului). Întrucât, după cum am văzut, s este un estimator distorsionat pentru σ, formula de construire a intervalului de încredere estimat este uşor modificată faţă de formula 6.1, pentru a se corecta distorsiunea. Astfel, formula modificată pentru cazurile (reale) în care σ este necunoscut şi $n \geq 30$ este următoarea:

Formula 6.2. $IE = \overline{X} \pm Z_{\alpha/2}(s/\sqrt{n-1})$

Înlocuirea lui $\sqrt{n}$ cu $\sqrt{n-1}$ reprezintă corecţia cerută de faptul că s este un estimator distorsionat.

Pentru ilustrare, să presupunem că venitul mediu al unui eşantion aleatoriu cu $n = 500$ este de 5.000.000 de lei ($\overline{X} = 5.000.000$) cu $s = 125.000$.

Care este intervalul de încredere estimat pentru media aritmetică a populației respective, la un nivel de încredere de 95% ($\alpha = 0{,}05$)?

$$IE = \overline{X} \pm Z_{\alpha/2}(s/\sqrt{n-1}) = 5.000.000 \pm 1{,}96(125.000/\sqrt{500-1}) =$$

$$= 5.000.000 \pm 1{,}96(125.000/22{,}34) = 5.000.000 \pm 1{,}96 \cdot 5595{,}34 =$$

$$= 5.000.000 \pm 10.967$$

Pe baza mediei aritmetice a eșantionului, estimăm că media aritmetică a veniturilor populației este cuprinsă între 4.989.033 lei (5.000.000 – 10.967) și 5.010.967 lei (5.000.000 – 10.967) și există doar 5% șanse ca acest interval să nu conțină media aritmetică a populației.

Atunci când eșantioanele sunt mici ($n < 30$) și valoarea lui σ este necunoscută, distribuția normală standard nu poate fi folosită pentru a descrie distribuția de eșantionare a mediilor aritmetice. Pentru a construi intervale estimate semnificative în cazul $n < 30$ se folosește o altă distribuție teoretică: **distribuția *t*-Student**[3]. Ca și în cazul distribuției normale, graficul distribuției *t*-Student, numit și **curba *t***, este simetric și are formă de clopot cu ambele extremități extinse la infinit. Spre deosebire de graficul distribuției normale, forma exactă a graficului distribuției *t* depinde de dimensiunea eșantionului. Pentru eșantioane mici, graficul distribuției *t* este mult mai aplatizat decât cel al distribuției normale (comparați figura următoare cu oricare dintre graficele de mai sus).

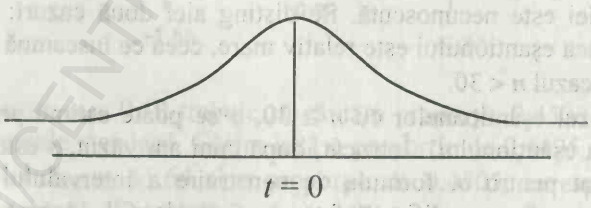


Figura 6.2. Un exemplu de curbă *t*

Pe măsură ce dimensiunea eșantionului crește, distribuția *t* seamănă din ce în ce mai mult cu distribuția normală, identificându-se cu aceasta pentru

[3] Această distribuție este datorată lui William S. Gosset, un chimist și statistician care lucra la fabrica de bere Guiness la începutul secolului al XX-lea. Gosset a descoperit că, pentru eșantioanele mici, distribuțiile de eșantionare diferă de distribuția normală și depind de dimensiunea eșantionului considerat. Gosset și-a publicat rezultatele în 1908 sub pseudonimul *Student*.

eşantioane practic foarte mari (şi teoretic infinite). Astfel, întrucât există o distribuţie *t* specifică pentru fiecare eşantion de dimensiune dată, distribuţia *t* este, de fapt, *o familie de distribuţii.*

Distribuţia *t* particulară cerută pentru rezolvarea unei anumite probleme depinde de un concept matematic numit **grade de libertate.** Acest concept se referă la numărul de valori libere să varieze într-o distribuţie. De pildă, dacă ştim că o distribuţie de cinci scoruri are media aritmetică egală cu 3 şi că patru dintre aceste scoruri sunt 1, 2, 3, şi 4, atunci valoarea celui de-al cincilea scor este fixată: 5. În general, pentru media aritmetică a unui eşantion de dimensiune n, o distribuţie are $n - 1$ grade de libertate. Fiecare distribuţie *t* este asociată cu un număr unic de grade de libertate. Mai precis, dacă se selectează toate eşantioanele posibile de dimensiune n dintr-o populaţie normală, atunci distribuţia de eşantionare a cantităţii

$$t = \frac{\bar{X} - \mu}{s/\sqrt{n-1}}$$

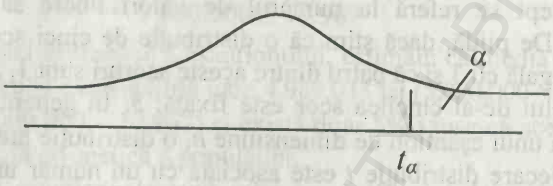
este distribuţia *t*-Student cu $n - 1$ grade de libertate.

Distribuţia *t* va fi utilizată îndeosebi în testarea ipotezelor. Deocamdată vom descrie **tabelul valorilor critice ale distribuţiei *t***, prezentat în Anexa C, şi vom ilustra utilizarea acestui tabel pentru estimarea intervalelor. Schema generală a acestui tabel este prezentată în figura 6.3.

gl	$t_{0,10}$	$t_{0,05}$	$t_{0,025}$	$t_{0,01}$	$t_{0,005}$
1					
2					
3					
⋮					
29			2,045		
30					
∞					

Figura 6.3. Schema tabelului valorilor critice ale distribuţiei *t*

Tabelul valorilor critice ale distribuției t specifică valorile pentru t_α, ceea ce înseamnă valorile lui t pentru care aria aflată la dreapta sub curba t este egală cu α:



Nivelurile α sunt dispuse pe primul rând al tabelului. Valorile t_α sunt date pentru grade de libertate (gl), dispuse pe prima coloană din stânga, de la 1 la 29 și apoi 30, 40, 60, 120 și ∞. De notat că, pe măsură ce numărul de grade de libertate crește, diferența dintre distribuția t și distribuția normală descrește, precum și că, pentru o infinitate de grade de libertate, distribuția t este identică cu distribuția normală. Pentru estimarea intervalelor, ca și pentru alte scopuri, avem nevoie de $t_{\alpha/2}$. Această valoare se localizează înmulțind cu 2 valoarea α aflată pe primul rând. De pildă, pentru $n = 30$ și $\alpha = 0{,}05$, numărul de grade de libertate este 29; la intersecția coloanei de sub $t_\alpha = 0{,}025$ și a liniei corespunzătoare pentru $gl = 29$ găsim valoarea 2,045. Astfel, în acest caz, vom spune că valoarea lui $t_{\alpha/2}$ este ±2,045.

Formula pentru cazurile în care σ este necunoscut și $n < 30$ este următoarea:

Formula 6.3. $IE = \overline{X} \pm t_{\alpha/2}(s/\sqrt{n})$

Pentru ilustrare, să presupunem că un eșantion aleatoriu de 20 de adolescenți cu dificultăți de învățare au obținut următoarele rezultate la un test de cunoștințe la care scorul maxim ce poate fi obținut este de 40:

Tabelul 6.2. Scoruri obținute la un test de cunoștințe de către 20 de adolescenți cu dificultăți de învățare

18	20	12	30
31	32	25	29
26	28	23	20
24	27	20	19
22	33	28	22

Presupunând că variabila măsurată este normal distribuită în populația de adolescenți cu dificultăți de învățare, care este intervalul de încredere estimat pentru media aritmetică a acestei populații, la un nivel de încredere de 99%? Calculăm mai întâi media aritmetică a scorurilor din eșantion:

$$\overline{X} = \frac{\sum X_i}{n} = \frac{489}{20} = 24{,}45$$

Abaterea standard la nivelul eșantionului este:

$$s = \sqrt{\frac{\sum X_i^2 - n\overline{X}^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{12515 - 20 \cdot 597{,}8}{19}} = \sqrt{29{,}4} = 5{,}40$$

Pentru $n = 20$, numărul de grade de libertate este 19; având $\alpha = 0{,}01$, la intersecția coloanei de sub $t_\alpha = 0{,}005$ și a liniei corespunzătoare pentru $gl = 19$ găsim valoarea 2,861. Astfel, valoarea lui $t_{\alpha/2}$ este ±2,861. Aplicând formula 6.3, obținem:

$$IE = \overline{X} \pm t_{\alpha/2}(s/\sqrt{n}) = 24{,}45 \pm 2{,}861(5{,}40/\sqrt{20}) = 24{,}45 \pm 3{,}40$$

Astfel, estimăm că media aritmetică pe care o căutăm este cuprinsă între 21,05 și 27,85 și există doar 1% șanse ca acest interval să nu conțină media aritmetică a populației.

De reținut că formula 6.3 poate fi aplicată doar dacă variabila de interes este normal distribuită.

6.4. ESTIMAREA PROPORȚIILOR

Pe baza teoremei limitei centrale se demonstrează că proporțiile pentru eșantioane (p) au distribuții de eșantionare aproximativ normale, cu media aritmetică (μ_p) egală cu proporția pentru populație (P) și abaterea standard (σ_p) egală cu $\sqrt{P(1-P)/n}$. Teoretic, formula pentru construirea unui interval estimat bazat pe proporții ale eșantioanelor este următoarea:

Formula 6.4. $IE = p \pm Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{P(1-P)}{n}}$

În această formulă, valorile pentru p și n provin de la eșantion, iar valoarea lui $Z_{\alpha/2}$ se determină la fel ca mai sus. Problema cu această formulă este că valoarea proporției pentru populație, P, nu este cunoscută. Pentru a rezolva această problemă, se poate proceda în două moduri.

Un prim mod de a rezolva problema constă în a stabili că $P = 0,5$. În această situație, $1 - P = 0,5$ și $P(1 - P) = 0,5 \cdot 0,5 = 0,25$. Este important de remarcat că 0,25 este valoarea maximă pe care o poate lua numărătorul fracției de sub radical, $P(1 - P)$. Stabilind pentru P orice altă valoare diferită de 0,5, valoarea expresiei $P(1 - P)$ va fi mai mică decât valoarea pentru $P = 0,5$. De pildă, dacă $P = 0,4$, atunci $1 - P = 0,6$ și $P(1 - P) = 0,4 \cdot 0,6 = 0,24$. Întrucât $P(1 - P)$ are valoarea maximă când $P = 0,5$, ne asigurăm că intervalul obținut va fi cel mai mare posibil pentru p, $Z_{\alpha/2}$ și n date. Practic, adoptând această soluție, lucrăm cu formula următoare:

Formula 6.5. $IE = p \pm Z_{\alpha/2}\sqrt{\dfrac{0,25}{n}}$

A doua soluție a problemei menționate constă în a estima valoarea lui P prin p, lucrând cu formula următoare:

Formula 6.6. $IE = p \pm Z_{\alpha/2}\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}$

Oricum, formulele de mai sus pot fi folosite doar dacă dimensiunea eșantionului considerat este destul de mare, astfel încât $np \geq 5$ și $n(1 - p) \geq 5$.

Să presupunem, de pildă, că dorim să estimăm proporția de studenți de la universitatea X care au lipsit cel puțin o zi pe motiv de boală într-un anumit semestru și că, dintr-un eșantion aleatoriu de 200 de studenți, găsim 30 în această situație. Astfel, proporția eșantionului pe care ne bazăm estimarea este $p = 30/200 = 0,15$. La un nivel de încredere de 95%, intervalul estimat cu ajutorul formulei 6.5 este următorul:

$$IE = p \pm Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{0,25}{n}} = 0,15 \pm 1,96\sqrt{\frac{0,25}{200}} = 0,15 \pm 0,07$$

Pe baza proporției de 0,30 a eșantionului, estimăm că proporția căutată este cuprinsă între 0,08 și 0,22. Estimarea poate fi exprimată și în termeni de procente, spunând că între 8% și 22% dintre studenții universității X au lipsit cel puțin o zi pe motiv de boală în semestrul considerat.

Să aplicăm acum formula 6.6 la aceleași date, păstrând nivelul de încredere de 95%:

$$IE = p \pm Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = 0,15 \pm 1,96\sqrt{\frac{0,15(1-0,15)}{200}} =$$

$$= 0,15 \pm 1,96\sqrt{\frac{0,15 \cdot 0,85}{200}} = 0,15 \pm 1,96\sqrt{\frac{0,13}{200}} = 0,15 \pm 0,05$$

În acest caz, estimăm că proporția căutată este cuprinsă între 0,10 și 0,20 sau, altfel spus, că între 10% și 20% dintre studenții universității *X* au lipsit cel puțin o zi pe motiv de boală în semestrul considerat.

De notat că intervalul estimat cu ajutorul formulei 6.5 este mai larg decât cel estimat cu ajutorul formulei 6.6, astfel încât prima estimare este cea mai conservatoare soluție posibilă, deoarece este mult mai probabil ca intervalele mai largi să conțină parametrul estimat. Prin urmare, din punct de vedere statistic, prima estimare este preferabilă celei de-a doua estimări.

6.5. DIMENSIUNI ALE EȘANTIOANELOR ȘI NIVELURI DE PRECIZIE

Formulele 6.1 și 6.5 pot fi manipulate algebric pentru a determina dimensiunea unui eșantion la orice nivel de precizie dorit sau, altfel spus, pentru orice limită de eroare stabilită.

6.5.1. Controlul mărimii intervalului estimat

Mărimea unui interval de încredere estimat pentru medii aritmetice sau proporții poate fi controlat prin intermediul a doi termeni ai ecuației respective: nivelul de încredere, care determină scorul Z_{a2} sau t_{a2} corespunzător, și dimensiunea eșantionului.

Relația dintre nivelul de încredere și mărimea intervalului este de proporționalitate directă: cu cât nivelul de încredere crește, cu atât intervalul este mai mare. Intuitiv, este mult mai probabil ca intervalele mai largi să conțină valoarea pentru populație, prin urmare putem avea mai multă încredere în astfel de intervale. Pentru a ilustra această relație, să considerăm din nou exemplul privind estimarea venitului mediu al unei populații: $n = 500$, $\overline{X} = 5.000.000$, $s = 125.000$. La un nivel de încredere de 95% am găsit intervalul 5.000.000 ± 10967 (i.e. acest interval se extinde la 10.967 lei în jurul mediei aritmetice a eșantionului). Acum, dacă luăm un nivel de încredere de 99%, scorul Z_{a2} corespunzător crește la ±2,58, iar intervalul se mărește:

$$IE = 5.000.000 \pm 2,58 \cdot 5595,34 = 5.000.000 \pm 14.436$$

(intervalul estimat la un nivel de încredere de 99% se extinde la 14.436 lei în jurul mediei). Exact aceeași relație se aplică și la proporții.

Relația dintre dimensiunea eșantionului și mărimea intervalului este de proporționalitate inversă: cu cât dimensiunea eșantionului este mai mare, cu atât intervalul este mai îngust. Intuitiv, eșantioanele mai mari permit estimări mai precise. Pentru ilustrare, să considerăm din nou exemplul

privind estimarea venitului mediu, modificând doar dimensiunea eşantionului: $n = 1000$ (95%).

$$IE = 5.000.000 \pm 1{,}96(125.000/\sqrt{1000-1}) = 5.000.000 \pm 1{,}96 \cdot 3955{,}7 = \\ = 5.000.000 \pm 7753$$

Pentru $n = 500$, la un nivel de încredere de 95%, intervalul estimat se extinde la 10.967 lei în jurul mediei; pentru $n = 1000$, toate celelalte rămânând aceleaşi, intervalul estimat se extinde doar la 7753 lei în jurul mediei. Exact aceeaşi relaţie se aplică şi la proporţii.

De notat că îngustarea intervalului (= creşterea preciziei) nu depinde în mod liniar de dimensiunea eşantionului. În exemplul nostru am dublat dimensiunea eşantionului, dar cel de-al doilea interval nu este de două ori mai îngust decât primul, ci de aproximativ 1,41 de ori mai îngust. Aceasta înseamnă că n trebuie să crească de trei sau patru ori pentru a obţine o dublare a preciziei. Întrucât costul unei cercetări este direct proporţional cu dimensiunea eşantionului, un eşantion de, să zicem, 10.000 de persoane costă aproximativ de două ori mai mult decât unul de 5000 de persoane, dar estimarea bazată pe eşantionul mai mare nu va fi de două ori mai precisă decât cea bazată pe eşantionul mai mic.

6.5.2. Determinarea dimensiunii eşantionului pentru estimarea mediilor aritmetice

Să considerăm formula 6.1:

$$IE = \overline{X} \pm Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

În această formulă, membrul $Z_{\alpha/2}(\sigma/\sqrt{n})$ reprezintă, în fapt, **limita de eroare** sau **nivelul de precizie** a estimării: $-Z_{\alpha/2}(\sigma/\sqrt{n})$ este limita inferioară, iar $+Z_{\alpha/2}(\sigma/\sqrt{n})$ este limita superioară. Notând limita de eroare cu L, putem scrie următoarea ecuaţie:

$$L = Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Ridicând la pătrat ambii membri ai ecuaţiei, egalitatea se păstrează:

$$L^2 = Z^2_{\alpha/2} \frac{\sigma^2}{n}$$

Din această egalitate îl putem obţine pe n:

Formula 6.7. $$n = \frac{Z^2_{\alpha/2}\sigma^2}{L^2}$$

Pentru a folosi această formulă trebuie să cunoaştem valoarea lui σ, or, după cum am mai menţionat, în aproape toate cazurile această valoare nu este cunoscută. Totuşi, valoarea lui σ poate fi aproximată, dacă ştim amplitudinea variabilei măsurate, A. Astfel, o aproximare conservatoare a lui σ este $\sigma \cong A/4$.

Să ilustrăm. Un psiholog industrial doreşte să estimeze durata medie în care un muncitor de la o firmă de produse electronice execută un anumit reglaj. Observând un număr de muncitori care execută reglajul respectiv, psihologul constată că durata cea mai mică este de 10 minute, iar cea mai mare de 22 de minute. Cât de mare trebuie să fie eşantionul selectat, dacă psihologul doreşte să estimeze durata medie de execuţie a acelui reglaj cu o precizie de 20 de secunde, la un nivel de încredere de 95%? În această problemă, $L = 20$ şi amplitudinea variabilei măsurate este $A = 22 - 10 = 12$ minute, astfel că:

$$\sigma \cong A/4 = 12/4 = 3 \text{ minute} = 180 \text{ secunde}$$

Acum îl putem obţine pe n:

$$n = \frac{Z_{\alpha/2}^2 \sigma^2}{L^2} \cong \frac{(1{,}96)^2 \cdot 180^2}{20^2} = 311{,}12 \cong 300$$

Prin urmare, psihologul trebuie să selecteze un eşantion aleatoriu de aproximativ 300 de muncitori pentru a estima durata medie de executare a reglajului respectiv cu o precizie de 20 de secunde, la un nivel de încredere de 95%.

Să presupunem acum că se doreşte dublarea preciziei de la ±20 de secunde la 10 secunde, la acelaşi nivel de încredere. În acest caz avem:

$$n = \frac{Z_{\alpha/2}^2 \sigma^2}{L^2} \cong \frac{(1{,}96)^2 \cdot 180^2}{10^2} = 1244{,}48 \cong 1244$$

Se observă că dimensiunea eşantionului creşte mai repede decât precizia: pentru a dubla precizia de la 20 de secunde la 10 secunde, dimensiunea eşantionului trebuie să crească de aproximativ patru ori. Această relaţie este importantă pentru planificarea costurilor unei cercetări. Eşantioanele impresionant de mari pot constitui o irosire de resurse fără un câştig semnificativ în privinţa preciziei, în raport cu eşantioanele mai mici, deci mai ieftine.

6.5.3. Determinarea dimensiunii eşantionului pentru estimarea proporţiilor

Am văzut că, practic, în construirea unui interval estimat pentru proporţii lucrăm cu formula

$$IE = p \pm Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{0,25}{n}}$$

Aici, limita de eroare a estimării este $Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{0,25}{n}}$. Notând tot cu L limita de eroare a estimării, avem ecuaţia:

$$L = Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{0,25}{n}}$$

Ridicând la pătrat ambii membri, avem:

$$L^2 = Z^2_{\alpha/2}\frac{0,25}{n}$$

Din această egalitate îl obţinem pe n:

Formula 6.8. $$n = \frac{Z^2_{\alpha/2}0,25}{L^2}$$

Să presupunem că un institut de sondare a opiniei publice doreşte să estimeze rezultatul unor alegeri prezidenţiale înăuntrul unei marje de eroare de ±3%. Cât de mare trebuie să fie eşantionul cerut pentru a asigura acest nivel de precizie la un nivel de încredere de 95%? Exprimând limita de eroare sub formă de proporţie, obţinem:

$$n = \frac{(1,96)^2 0,25}{(0,03)^2} = 1067,11 \cong 1000$$

Prin urmare, pentru a obţine o precizie (o limită de eroare a estimării) de ±3%, este nevoie de un eşantion de aproximativ 1000 de persoane.

Şi aici se poate uşor constata că dimensiunea eşantionului creşte mai repede decât precizia. Tabelul următor prezintă relaţiile dintre precizie şi dimensiunea eşantionului pentru proporţii ale eşantioanelor:

Tabelul 6.3. Precizia şi dimensiunea eşantionului
($\alpha = 0,05$, $P = 0,5$)

Precizia (mărimea intervalului)	Dimensiunea aproximativă a eşantionului
±10%	100
±7%	200
Precizia (mărimea intervalului)	Dimensiunea aproximativă a eşantionului
±5%	400
±3%	1000
±2%	2400
±1%	9600

Se poate observa, de pildă, că pentru a dubla precizia de la 10% la 5%, dimensiunea eşantionului trebuie să crească de patru ori.

BCU IASI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

GLOSAR

Curba *t*: grafic al unei distribuții *t*; ca și curba normală, curba *t* este simetrică și are formă de clopot cu ambele extremități extinse la infinit; spre deosebire curba normală, forma exactă a curbei *t* depinde de dimensiunea eșantionului.

Distorsiune: criteriu folosit pentru selectarea unei mărimi statistice ca estimator; o mărime statistică este nedistorsionată dacă media aritmetică a distribuției sale de eșantionare este egală cu media aritmetică a populației de referință.

Distribuția *t*: distribuție teoretică ce descrie distribuția de eșantionare a mediilor aritmetice în cazul în care eșantioanele sunt mici ($n < 30$) și valoarea lui σ este necunoscută.

Eficiență: criteriu folosit pentru selectarea unei mărimi statistice ca estimator; o mărime statistică este cu atât mai eficientă cu cât distribuția de eșantionare este mai grupată în jurul mediei sale aritmetice sau, altfel spus, cu cât este mai mică abaterea standard a distribuției de eșantionare.

Grade de libertate: concept care se referă la numărul de valori libere să varieze într-o distribuție.

Interval de încredere estimat: amplitudine de valori în care este probabil să se afle un parametru al populației de interes.

Nivel alfa (α) : Probabilitatea ca un parametru să nu se afle în intervalul estimat sau, altfel spus, probabilitatea de eroare a estimării.

Nivel de încredere: probabilitatea ca intervalul estimat să conțină parametrul de interes.

Proceduri de estimare: tehnici statistice în care pe baza unei statistici calculate pentru un eșantion, numită **estimator**, se face o apreciere despre parametrul corespunzător al populației de referință.

Punct estimat: o singură valoare calculată pentru un eșantion și folosită pentru a face o apreciere despre parametrul corespunzător al populației de referință.

BCU IAȘI

7. TESTAREA IPOTEZELOR DESPRE O SINGURĂ POPULAȚIE

În acest capitol vom prezenta tehnici statistice de testare a ipotezelor despre o singură populație. Într-un astfel de caz, pe baza unei statistici calculate pentru un eșantion, cel mai adesea o medie aritmetică sau o proporție, se trage o concluzie despre parametrul corespunzător al populației de referință. Mai precis, cercetarea constă în alcătuirea unui eșantion aleatoriu din populația de referință, culegerea informației relevante din eșantion, calcularea valorii unei statistici și compararea acestei valori cu valoarea presupusă a parametrului corespunzător. În aproape toate situațiile de cercetare, vom găsi o anumită diferență între cele două valori, iar tehnicile de testare a ipotezelor permit să se decidă dacă diferența este atât de mare încât să justifice respingerea presupunerii făcute pentru populație.

Tehnicile de testare a ipotezelor pe care le vom prezenta în acest capitol, precum și în capitolele care urmează sunt teste despre valoarea parametrilor unei populații și cer îndeplinirea unor condiții sau supoziții despre populațiile respective, cum este, în principal, normalitatea. Testele de acest fel se numesc **teste parametrice.**

7.1. TESTUL SCORURILOR Z PENTRU MEDII ARITMETICE CÂND σ ESTE CUNOSCUT

Vom prezenta acest test cu ajutorul unui exemplu, pe care îl vom folosi și pentru a introduce noțiunile fundamentale ale testelor parametrice: *ipoteză de nul, ipoteză alternativă, statistică a testului* și *regulă de decizie.*

Un cercetător presupune că, într-un anumit an, media aritmetică a punctajelor obținute la examenul de rezidențiat al medicilor este de 800. Pentru a testa această ipoteză, cercetătorul alcătuiește un eșantion aleatoriu de 130 de medici care și-au susținut rezidențiatul în acel an și constată că la nivelul acestui eșantion media aritmetică a punctajului obținut este de 755. Prin investigații extensive, cercetătorul știe că abaterea standard la nivelul populației de referință este de aproximativ 143. Problema care se pune este dacă diferența dintre media aritmetică a eșantionului și valoarea presupusă pentru populație este sau nu statistic semnificativă. Dacă răspunsul este afirmativ, atunci ipoteza făcută poate fi respinsă. Dacă, însă, răspunsul este negativ, atunci diferența poate fi pusă pe seama întâmplării, astfel încât ipoteza cercetătorului nu poate fi respinsă. După cum vom vedea, testul

scorurilor Z permite determinarea matematică a înțelesului termenului „statistic semnificativ". Datele problemei sunt, deci, următoarele:

Populație	Eșantion
$\mu_H = 800$	$\overline{X} = 755$
$\sigma = 152$	$n = 130$

Am notat cu μ_H media aritmetică presupusă a populației, pentru a o deosebi de media aritmetică efectivă a populației, μ.

Ipoteza de nul, pe care o vom nota H_0, specifică o anumită valoare pentru parametrul respectiv. În general, ipoteza de nul despre media aritmetică a unei populații are forma:

$$H_0: \mu = \mu_H$$

Denumirea de „ipoteză de nul" se justifică prin aceea că forma sa poate fi redată echivalent prin:

$$H_0: \mu - \mu_H = 0$$

În cuvinte, ipoteza de nul enunță că nu există nici o diferență semnificativă între valoarea efectivă a parametrului respectiv și valoarea presupusă a acelui parametru. Dacă ipoteza de nul este adevărată, atunci diferența dintre eșantion și populație nu este semnificativă, putând fi atribuită întâmplării.

În mod obișnuit, cercetătorul este de părere că există o diferență semnificativă între eșantion și populație și dorește să respingă ipoteza de nul ca neadevărată. Această opinie constituie **ipoteza alternativă**, pe care o vom nota cu H_a. Dacă cercetătorul nu are posibilitatea sau nu dorește să prezică sensul diferenței, atunci ipoteza alternativă ia forma

$$H_a: \mu \neq \mu_H$$

Dacă, însă, sensul diferenței dintre eșantion și populație poate fi prezis, sau dacă cercetătorul este interesat doar de un singur sens al diferenței, atunci ipoteza alternativă poate lua una dintre următoarele două forme:

$$H_a: \mu > \mu_H$$
$$H_a: \mu < \mu_H$$

În cazul în care H_a are forma $\mu \neq \mu_H$, se spune că testul este **bilateral** sau **nedirecțional**, iar în cazurile în care H_a are una dintre celelalte două forme, se spune că testul este **unilateral** sau **direcțional**. Vom reveni la aceste noțiuni ceva mai departe. Să reținem deocamdată că în orice test se decide dacă se respinge sau nu se respinge ipoteza de nul, pe baza dovezilor

aduse în sprijinul ipotezei alternative. Astfel, dacă putem respinge H_0 ca neadevărată, atunci vom accepta H_a.

Revenind la exemplul nostru, ipoteza de nul este H_0: $\mu = 800$. Din enunțul problemei rezultă că nu este vorba despre un sens al diferenței menționate, astfel încât ipoteza alternativă este H_a: $\mu \neq 800$.

Termenul **statistică a testului** se referă la formula a cărei aplicare în testul respectiv permite obținerea unei valori ce formează baza deciziei asupra ipotezei de nul. Pentru mediile aritmetice, atunci când se cunoaște sau se poate aproxima valoarea lui σ, statistica testului este dată de următoarea formulă:

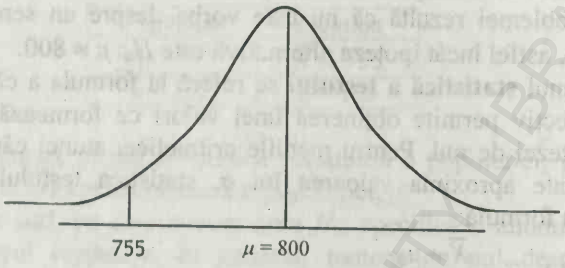
Formula 7.1. $$Z = \frac{\overline{X} - \mu_H}{\sigma/\sqrt{n}}$$

Să notăm că această formulă este analoagă structural formulelor de calcul pentru scorurile Z „brute" (v. secțiunea 4.2), aici fiind vorba despre scorul Z al unei medii aritmetice. Ca atare, în numitorul formulei 7.1 apare abaterea standard a distribuției de eșantionare a $\overline{X}$, astfel că această formulă ne dă distanța în abateri standard sau fracțiuni de abateri standard a mediei aritmetice a eșantionului, $\overline{X}$, față de valoarea presupusă pentru populație. În exemplul nostru, avem:

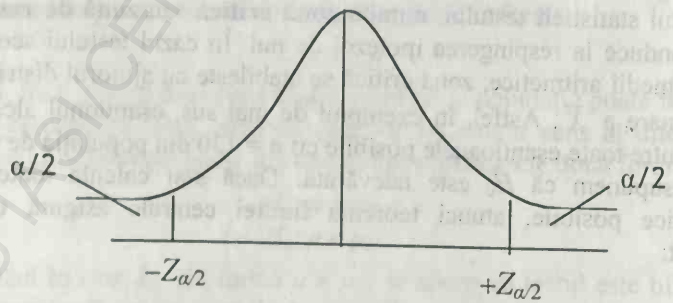
$$Z = \frac{\overline{X} - \mu_H}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{755 - 800}{152/\sqrt{130}} = \frac{-45}{152/11{,}40} = \frac{-45}{13{,}4} = -3{,}36$$

Din motive care vor deveni imediat evidente, vom desemna rezultatul aplicării formulei 7.1 prin **Z (obținut)**. Aici, Z (obținut) = –3,36.

Regula de decizie se referă la o anumită amplitudine de valori pentru rezultatul statisticii testului, numită **zonă critică** sau **zonă de respingere**, care conduce la respingerea ipotezei de nul. În cazul testului scorurilor Z pentru medii aritmetice, zona critică se stabilește cu ajutorul distribuției de eșantionare a $\overline{X}$. Astfel, în exemplul de mai sus, eșantionul alcătuit este unul dintre toate eșantioanele posibile cu $n = 130$ din populația de referință. Să presupunem că H_0 este adevărată. Dacă s-ar calcula toate mediile aritmetice posibile, atunci teorema limitei centrale asigură următorul rezultat:



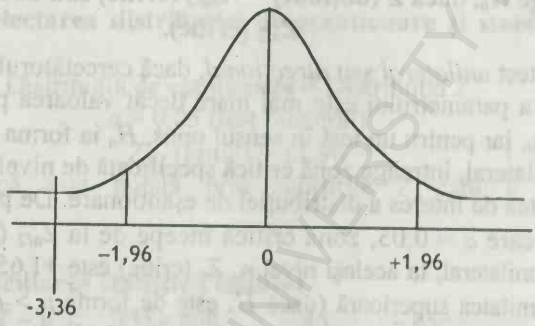
În general, cu cât $\overline{X}$ este mai aproape de centru (diferența dintre $\overline{X}$ și $\mu_{\overline{X}} = \mu$ este mai mică), cu atât vom fi mai înclinați să nu respingem ipoteza de nul și cu cât $\overline{X}$ este mai departe de centru (diferența dintre $\overline{X}$ și $\mu_{\overline{X}} = \mu$ este mai mare), cu atât vom fi mai înclinați să respingem ipoteza de nul. Cu alte cuvinte, ipoteza de nul poate fi respinsă dacă rezultatul statisticii testului este un număr negativ „prea mare" sau un număr pozitiv „prea mare". Înțelesul expresiei „prea mare" se fixează prin alegerea unui nivel de încredere sau nivel α (revedeți capitolul anterior). În cazul ipotezei alternative de forma H_a: $\mu \neq \mu_H$, nivelul α ales se împarte în mod egal în cele două extremități ale distribuției de eșantionare:



Aria de sub $-Z_{\alpha/2}$ plus aria de peste $+Z_{\alpha/2}$ reprezintă zona critică: dacă scorul Z corespunzător mediei aritmetice a unui eșantion cade în această arie (i.e. sub $-Z_{\alpha/2}$ sau peste $+Z_{\alpha/2}$), atunci media aritmetică respectivă are prin definiție o probabilitate de apariție mai mică decât α. Scorurile $-Z_{\alpha/2}$ și

$+Z_{\alpha/2}$ se numesc **scoruri *Z* critice** şi se desemnează, respectiv, prin $Z_{\alpha/2}$ **(critic)** şi $+Z_{\alpha/2}$ **(critic)**.

Să revenim la exemplul nostru şi să stabilim $\alpha = 0,05$. Ştim că pentru această valoare a lui α, $Z_{\alpha/2} = \pm 1,96$. *Z* (obţinut) se află în zona critică ($-3,36 < -1,96$), după cum se ilustrează în figura următoare:



Ca atare, suntem îndreptăţiţi să respingem ipoteza de nul: probabilitatea de apariţie a mediei aritmetice a eşantionului considerat este mai mică decât 0,05, deci nu poate fi atribuită întâmplării. Cu alte cuvinte, diferenţa dintre media aritmetică a eşantionului şi media aritmetică presupusă pentru populaţie este statistic semnificativă (eşantionul de rezidenţi diferă semnificativ de populaţia din care a fost selectat), astfel încât ipoteza de nul poate fi respinsă.

De notat că decizia pe care am luat-o (respingerea ipotezei de nul) comportă un element de risc: poate fi greşită, întrucât este posibil ca eşantionul considerat să fie unul dintre puţinele eşantioane nereprezentative pentru populaţia de medici rezidenţi. O trăsătură foarte importantă a testării ipotezelor constă în aceea că probabilitatea de a lua o decizie greşită este cunoscută, fiind dată de nivelul α ales. În exemplul nostru, probabilitatea de a lua o decizie greşită este de 0,05. A spune că probabilitatea de a fi respins greşit ipoteza de nul este de 0,05 revine la a spune că, dacă am repeta acest test de o infinitate de ori, vom respinge greşit H_0 doar de 5 ori la fiecare 100 de repetări. Rezultatul de mai sus poate fi enunţat şi spunând că diferenţa menţionată este statistic semnificativă la un nivel de încredere de 95%. Ca şi pentru estimarea intervalelor, nivelurile de încredere folosite în mod obişnuit în testarea ipotezelor sunt 90%, 95% şi 99%.

Testul întreprins în acest exemplu este *bilateral* sau *nedirecțional*. În general, într-un astfel de test, ipoteza alternativă enunță doar că există o diferență între valoarea efectivă a parametrului respectiv și valoarea presupusă pentru acel parametru. După cum am văzut, în cazul unui test bilateral, zona critică specificată de nivelul α se împarte în mod egal în cele două extremități ale distribuției de eșantionare. Într-un test bilateral, indiferent de nivelul α ales, regula de decizie este următoarea:

se respinge H_0, dacă Z (obținut) $+Z_{\alpha/2}$ (critic) sau dacă Z (obținut) $-Z_{\alpha/2}$ (critic).

Într-un test *unilateral* sau *direcțional*, dacă cercetătorul crede că valoarea efectivă a parametrului este mai mare decât valoarea presupusă, H_a ia forma $\mu > \mu_H$, iar pentru un test în sensul opus, H_a ia forma $\mu < \mu_H$. În cazul unui test unilateral, întreaga zonă critică specificată de nivelul α este plasată în extremitatea de interes a distribuției de eșantionare. De pildă, într-un test bilateral în care $\alpha = 0{,}05$, zona critică începe de la $Z_{\alpha/2}$ (critic) = $\pm 1{,}96$. Într-un test unilateral, la același nivel α, Z_α (critic) este $+1{,}65$ dacă este vorba despre extremitatea superioară (dacă H_a este de forma $\mu > \mu_H$) și este $-1{,}65$ dacă este vorba despre extremitatea inferioară (dacă H_a este de forma $\mu < \mu_H$)[1]. De notat că aici folosim Z_α în loc de $Z_{\alpha/2}$, întrucât întreaga zonă critică este plasată într-o singură extremitate a distribuției de eșantionare.

Într-un test unilateral, indiferent de nivelul α ales, dacă H_a este de forma $\mu > \mu_H$ („test unilateral dreapta"), atunci regula de decizie este

se respinge H_0, dacă Z (obținut) $+Z_\alpha$ (critic).

Dacă H_a este de forma $\mu < \mu_H$ („test unilateral stânga") atunci regula de decizie este

se respinge H_0, dacă Z (obținut) $-Z_\alpha$ (critic).

După cum rezultă și din cele de mai sus, un test unilateral este mai „bun" decât unul bilateral, deoarece zona critică este „trasă" mai aproape de media aritmetică, îmbunătățind astfel probabilitatea de a respinge H_0. Astfel, dacă cercetătorul are mai multă experiență și mai multe cunoștințe în legătură cu variabila investigată, atunci se recomandă folosirea unui test unilateral, ceea ce cere o ipoteză alternativă direcțională.

Se obișnuiește ca testarea ipotezelor statistice să fie organizată sub forma unui „model în n pași", numărul de pași diferind de la un autor la

[1] Scădem 0,05 din 0,5 (proporția de cazuri aflate de o parte și de alta a mediei aritmetice a distribuției de eșantionare). Rezultatul scăderii este 0,4500. Conform tabelului distribuției normale standard, scorul Z corespunzător acestei proporții este 1,65.

altul, în funcție de anumite opțiuni de compactare sau de detaliere a informației. În cele ce urmează vom folosi un model în 4 pași, pe care îl exemplificăm pentru problema tratată mai sus:

Pasul 1. Enunțarea ipotezelor

$$H_0: \mu = 800$$
$$H_a: \mu \neq 800$$

Pasul 2. Selectarea distribuției de eșantionare și stabilirea zonei critice

Distribuția de eșantionare = Distribuția Z

$\alpha = 0{,}05$ (test bilateral)

$Z_{\alpha/2}$ (critic) $= \pm 1{,}96$

(Zona critică este notată prin scorurile Z care îi marchează începuturile.)

Pasul 3. Calcularea statisticii testului

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu_H}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{755 - 800}{152/\sqrt{130}} = \frac{-45}{152/11{,}40} = \frac{-45}{13{,}4} = -3{,}36$$

Pasul 4. Luarea deciziei

Întrucât Z (obținut) se află în zona critică ($-3{,}36 < -1{,}96$), ipoteza de nul poate fi respinsă. Diferența dintre eșantionul de medici rezidenți și populația de referință nu poate fi atribuită întâmplării sau, altfel spus, această diferență este statistic semnificativă (la un nivel de încredere de 95%).

Pentru a ilustra aplicarea unui test unilateral, să presupunem că cercetătorul din exemplul de mai sus dorește să testeze ipoteza că media aritmetică a populației de rezidenți este mai mică decât 800, toate celelalte date fiind aceleași. În acest caz, cercetătorul este interesat doar de extremitatea stângă a distribuției de eșantionare și va plasa întreaga zonă critică în această extremitate. În termenii modelului în patru pași, testul decurge după cum urmează:

Pasul 1. Enunțarea ipotezelor

$$H_0: \mu = 800$$
$$H_a: \mu < 800$$

Pasul 2. Selectarea distribuției de eșantionare și stabilirea zonei critice

Distribuția de eșantionare = Distribuția Z

$\alpha = 0{,}05$ (test unilateral stânga)

Z_α (critic) $= -1{,}65$

Pasul 3. Calcularea statisticii testului

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu_H}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{755 - 800}{152/\sqrt{130}} = \frac{-45}{152/11{,}40} = \frac{-45}{13{,}4} = -3{,}36$$

Pasul 4. Luarea deciziei

Întrucât Z (obținut) se află în zona critică ($-3{,}36 < -1{,}65$), ipoteza de nul poate fi respinsă și se poate accepta că media aritmetică a populației de rezidenți este mai mică decât 800 (la un nivel de încredere de 95%).

7.2. ERORI ÎN TESTAREA IPOTEZELOR

Atunci când decidem să respingem sau să nu respingem ipoteza de nul, sunt posibile patru situații, descrise în figura următoare:

	H_0 adevărată	H_0 falsă
Se respinge H_0	Eroare de tipul I	Decizie corectă
Nu se respinge H_0	Decizie corectă	Eroare de tipul II

Figura 7.1. Rezultatele unui test al ipotezelor

După cum se indică în figura 7.1, H_0 este în realitate adevărată sau falsă și sunt posibile două decizii: se respinge H_0 sau nu se respinge H_0. Ca atare, sunt posibile două decizii corecte: respingerea unei ipoteze de nul false și nerespingerea unei ipoteze de nul adevărate. Corespunzător, sunt posibile două decizii greșite: respingerea unei ipoteze de nul care este adevărată, numită **eroare de tipul I**, și nerespingerea unei ipoteze de nul care este falsă, numită **eroare de tipul II**. Probabilitatea de a comite o eroare de tipul I este desemnată prin α, iar probabilitatea de a comite o eroare de tipul II este desemnată prin β.

Probabilitatea de a comite o eroare de tipul I este determinată de nivelul α ales. Astfel, atunci când se alege un nivel α, distribuția de

eşantionare este împărţită în două mulţimi de rezultate ale eşantioanelor posibile: zona critică, ce include toate rezultatele definite ca improbabile sau rare şi care îndreptăţesc respingerea H_0, şi zona necritică, ce constă în toate rezultatele definite drept „non-rare". Cu cât nivelul α este mai mic, cu atât este mai mică zona critică şi, corespunzător, este mai mare distanţa dintre media aritmetică a distribuţiei de eşantionare şi începuturile (în cazul unui test bilateral) sau începutul (în cazul unui test unilateral) zonei critice. De pildă, dacă se alege $\alpha = 0{,}05$, probabilitatea de a comite o eroare de tipul I este de 0,05: dacă H_0 este respinsă, există 5 şanse din 100 ca această decizie să fie greşită; dacă $\alpha = 0{,}01$, probabilitatea de a comite o eroare de tipul I este de 0,01: dacă H_0 este respinsă, există doar 1 şansă din 100 ca această decizie să fie greşită. Prin urmare, pentru a minimiza probabilitatea de a comite o eroare de tipul I, trebuie să folosim niveluri α foarte mici.

Pe de altă parte, cu cât nivelul α este mai mic, cu atât este mai mare zona necritică şi, păstrând celelalte date constante, este mai puţin probabil ca rezultatul obţinut pe eşantion să cadă în zona critică, deci este mai mare probabilitatea de a comite o eroare de tipul II.

Prin urmare, cele două probabilităţi sunt invers proporţionale, nefiind posibil să le minimizăm pe amândouă: dacă alegem un nivel α foarte mic pentru a minimiza probabilitatea de a comite o eroare de tipul I, creşte probabilitatea de a comite o eroare de tipul II. Cu alte cuvinte, dacă creştem dificultatea de a respinge ipoteza de nul, probabilitatea de a nu respinge ipoteza de nul atunci când aceasta este falsă creşte. În mod normal, în ştiinţele omului se doreşte minimizarea probabilităţii erorii de tipul I, socotită a fi mai gravă decât eroarea de tipul II, astfel încât se aleg valori mici pentru α.

În tabelul următor sunt prezentate câteva scoruri Z critice pentru niveluri α mai des folosite, atât pentru teste bilaterale, cât şi pentru teste unilaterale:

Tabelul 7.1. Scoruri *Z* critice

Niveluri α test bilateral	Niveluri α, test unilateral	Scoruri Z critice
0,20	0,10	1,29
0,10	0,05	1,65
0,05	0,025	1,96
0,01	0,005	2,58

De regulă nivelul $\alpha = 0{,}05$ este considerat drept un indicator bun al unui rezultat semnificativ.

7.3. TESTAREA IPOTEZELOR PENTRU MEDII ARITMETICE CÂND σ ESTE NECUNOSCUT

Ca şi în privinţa estimării intervalelor, în aproape toate situaţiile reale de cercetare, valoarea abaterii standard a populaţiei este necunoscută. Şi aici vom distinge două cazuri: cazul în care dimensiunea eşantionului este mare, ceea ce înseamnă eşantioane cu $n \geq 30$, şi cazul $n < 30$. În cazul eşantioanelor cu $n \geq 30$, σ se poate estima prin s, iar în pasul 3 se foloseşte următoarea formulă:

Formula 7.2. $$Z = \frac{\overline{X} - \mu_H}{s/\sqrt{n-1}}$$

Această formulă diferă de formula 7.1 prin aceea că σ este înlocuit cu s, iar n este înlocuit cu $n - 1$ pentru a se corecta distorsiunea lui s.

În cazul eşantioanelor cu $n < 30$, distribuţia de eşantionare este distribuţia t-Student, prezentată în capitolul 6, iar în pasul 3 se foloseşte următoarea formulă:

Formula 7.3. $$t = \frac{\overline{X} - \mu_H}{s/\sqrt{n-1}}$$

Vom spune că este vorba despre **testul scorurilor *t* pentru medii aritmetice** şi vom desemna rezultatul aplicării formulei 7.3 prin ***t* (obţinut)**.

Un cercetător primeşte informaţia neverificată conform căreia media aritmetică a coeficientului de inteligenţă al participanţilor la fazele naţionale ale olimpiadelor de matematică din ultimii 10 ani este de aproximativ 120. Pentru a testa această ipoteză, cercetătorul selectează un eşantion aleatoriu de 20 de olimpici la matematică din ultimii 10 ani şi constată că media aritmetică a coeficientului de inteligenţă la nivelul eşantionului este de 123, abaterea standard la nivelul eşantionului fiind de 8. Cercetătorul este interesat să determine la un nivel de încredere de 99% dacă media aritmetică a coeficientului de inteligenţă al participanţilor la fazele naţionale ale olimpiadelor de matematică din ultimii 10 ani este mai mare de 125. Datele problemei sunt, deci, următoarele:

Populaţie	Eşantion
$\mu_H = 125$	$\overline{X} = 123$
$\sigma = 8$	$s = 8$
	$n = 20$

Pasul 1. Enunțarea ipotezelor

$$H_0: \mu = 125$$
$$H_a: \mu > 125$$

Pasul 2. Selectarea distribuției de eșantionare și stabilirea zonei critice

Distribuția de eșantionare = Distribuția t

$\alpha = 0{,}01$ (test unilateral dreapta)

$gl = 20 - 1 = 19$

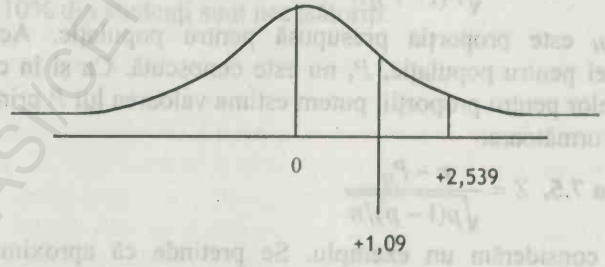
t_a (critic) = +2,539

Pasul 3. Calcularea statisticii testului

$$t = \frac{\overline{X} - \mu_H}{s/\sqrt{n-1}} = \frac{125-123}{8/\sqrt{19}} = \frac{2}{8/4{,}36} = +1{,}09$$

Pasul 4. Luarea deciziei

Întrucât t (obținut) nu cade în zona critică (+1,09 < +2,539), cercetătorul nu poate respinge ipoteza de nul. Pe baza mediei aritmetice a eșantionului nu se poate conchide la un nivel de încredere de 99% că media aritmetică a coeficientului de inteligență al participanților la fazele naționale ale olimpiadelor de matematică din ultimii 10 ani este mai mare de 120. Rezultatul acestui test este prezentat grafic în figura următoare:



În cazul folosirii distribuției t ca distribuție de eșantionare, regulile de decizie au aceeași structură cu cele ale testului scorurilor Z. Astfel, într-un test bilateral, indiferent de nivelul α ales și de numărul de grade de libertate, regula de decizie este următoarea:

se respinge H_0, dacă t (obținut) > $+t_{\alpha/2}$ (critic) sau dacă t (obținut) < $-t_{\alpha/2}$ (critic).

Într-un test unilateral dreapta ($\mu > \mu_H$), regula de decizie este:

se respinge H_0, dacă t (obținut) > $+t_{\alpha}$ (critic).

În fine, într-un test unilateral stânga ($\mu < \mu_H$), regula de decizie este:

se respinge H_0, dacă t (obținut) < $-t_{\alpha}$ (critic).

7.4. TESTUL SCORURILOR Z PENTRU PROPORȚII

Atunci când variabila de interes nu este de interval sau de raport, astfel încât să se justifice calcularea mediei aritmetice, se poate utiliza proporția eșantionului (p) în loc de media aritmetică. În cele ce urmează, prezentăm un test al ipotezelor pentru proporții, aplicabil în cazul eșantioanelor pentru care $np \geq 5$ și $n(1-p) \geq 5$.

În acest test, formula de calcul pentru Z (obținut) are aceeași structură cu formula 7.1: Z (obținut) este egal cu mărimea pentru eșantion minus valoarea presupusă pentru parametrul corespunzător, totul de împărțit la abaterea standard a distribuției de eșantionare. Din capitolul anterior, știm că proporțiile pentru eșantioane (p) au distribuții de eșantionare aproximativ normale, cu media aritmetică (μ_p) egală cu proporția pentru populație (P) și abaterea standard (σ_p) egală cu $\sqrt{P(1-P)/n}$. Teoretic, formula de calcul al testului scorurilor Z pentru proporții este următoarea:

Formula 7.4. $$Z = \frac{p - P_H}{\sqrt{P(1-P)/n}}$$

unde P_H este proporția presupusă pentru populație. Acum, valoarea proporției pentru populație, P, nu este cunoscută. Ca și în cazul estimării intervalelor pentru proporții, putem estima valoarea lui P prin p, lucrând cu formula următoare:

Formula 7.5. $$Z = \frac{p - P_H}{\sqrt{p(1-p)/n}}$$

Să considerăm un exemplu. Se pretinde că aproximativ 10% din studenții unei mari universități sunt căsătoriți. Pentru testarea acestei ipoteze, se selectează un eșantion aleatoriu de 200 de studenți de la universitatea respectivă și se constată că 24 de studenți din eșantion sunt căsătoriți. În baza acestui rezultat, se poate spune la un nivel de încredere de 95% că mai mult de 10% din studenți sunt necăsătoriți? Datele problemei sunt următoarele:

Populație	Eșantion
$P_H = 0,10$	$p = 0,12$
	$n = 200$

Folosind formula 7.5, testul decurge după cum urmează:

Pasul 1. Enunțarea ipotezelor

$$H_0: P = 0,10$$
$$H_a: P > 0,10$$

Pasul 2. Selectarea distribuției de eșantionare și stabilirea zonei critice

Distribuția de eșantionare = Distribuția Z
$\alpha = 0,05$ (test unilateral dreapta)
Z_α (critic) = +1,65

Pasul 3. Calcularea statisticii testului

$$Z = \frac{p - P_H}{\sqrt{p(1-p)/n}} = \frac{0,12 - 0,10}{\sqrt{0,12(1-0,12)/300}} = \frac{0,02}{0,0188} = +1,06$$

Pasul 4. Luarea deciziei

Întrucât Z (obținut) nu cade în zona critică (+1,06 < +1,65), ipoteza de nul nu poate fi respinsă. La nivelul de încredere de 95% nu se poate spune că mai mult de 10% din studenți sunt necăsătoriți.

BCU IASI/CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

GLOSAR

Eroare de tipul I: respingerea unei ipoteze de nul care este adevărată; probabilitatea de a comite o eroare de tipul I este desemnată prin α.

Eroare de tipul II: nerespingerea unei ipoteze de nul care este falsă; probabilitatea de a comite o eroare de tipul II este desemnată prin β.

Ipoteză alternativă: în contextul statisticilor inferențiale, ipoteză care enunță că există o diferență între valoarea efectivă a unui parametru și valoarea presupusă pentru acel parametru; dacă sensul diferenței poate fi prezis, ipoteza alternativă este direcțională, în caz contrar este nedirecțională.

Ipoteză de nul: în contextul statisticilor inferențiale, ipoteză care enunță că nu există nici o diferență semnificativă între valoarea efectivă a unui parametru și valoarea presupusă a acelui parametru.

Regulă de decizie: enunț referitor la o anumită amplitudine de valori pentru rezultatul statisticii testului, numită zonă critică sau zonă de respingere, care conduce la respingerea ipotezei de nul.

Statistică a testului: formula a cărei aplicare în testul respectiv permite obținerea unei valori ce formează baza deciziei asupra ipotezei de nul.

Teste parametrice: teste statistice despre valoarea parametrilor unei populații, care cer îndeplinirea unor condiții sau supoziții despre populațiile respective, cum este, în principal, normalitatea.

Test bilateral: test statistic în care ipoteza alternativă este nedirecțională.

Test unilateral: test statistic în care ipoteza alternativă este direcțională.

BCU IASI/CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

8. TESTAREA IPOTEZELOR DESPRE DIFERENȚELE DINTRE DOUĂ POPULAȚII

Problema de cercetare abordată în capitolul 7 viza semnificația diferenței dintre valoarea unei statistici (medie aritmetică sau proporție) calculată pentru un eșantion și valoarea presupusă a parametrului corespunzător al populației de referință. În acest capitol vom prezenta procedee de testare a ipotezelor privind diferențele dintre mediile aritmetice a două populații, $\mu_1 - \mu_2$, și dintre proporțiile a două populații, $P_1 - P_2$. Problema centrală în acest caz poate fi formulată după cum urmează: diferența dintre două eșantioane sub aspectul variabilei de interes este suficient de mare pentru a putea conchide, cu o probabilitate de eroare cunoscută, că populațiile reprezentate de eșantioane sunt diferite sub aspectul variabilei respective?

Toate testele statistice prezentate în continuare sunt aplicabile sub supoziția că eșantioanele selectate aleatoriu din cele două populații de referință sunt independente. Două eșantioane sunt **independente** dacă selectarea cazurilor pentru un eșantion nu influențează selectarea cazurilor pentru celălalt eșantion. Astfel, testele prezentate în acest capitol nu pot fi aplicate atunci când între cele două eșantioane există o dependență de vreun fel sau altul, de pildă în situațiile experimentale în care aceiași subiecți sunt testați înainte și după aplicarea unui tratament.

8.1. TESTUL SCORURILOR *Z* PENTRU DIFERENȚA DINTRE DOUĂ MEDII ARITMETICE

Testul expus în această secțiune este aplicabil dacă, pe lângă independența eșantioanelor, sunt satisfăcute următoarele două condiții: (i) nivelul de măsură al variabilei de interes este de interval sau de raport și (ii) cele două eșantioane sunt relativ mari, ceea ce înseamnă $n_1 \geq 30$ și $n_2 \geq 30$.

Distribuția de eșantionare la care ne vom referi în continuare este *distribuția de eșantionare a diferențelor dintre mediile aritmetice ale eșantioanelor*, despre care se demonstrează că este normală dacă distribuțiile de eșantionare separate ale mediilor aritmetice ale eșantioanelor sunt normale. Teorema limitei centrale garantează că aceste distribuții de eșantionare aproximează cu atât mai bine normalitatea cu cât dimensiunile eșantioanelor sunt mai mari. Astfel, atunci când eșantioanele sunt mari, pentru descrierea acestei distribuții de eșantionare se poate folosi distribuția *Z*.

Ipoteza de nul este şi în acest caz un enunţ de tipul „nici o diferenţă", numai că este vorba despre diferenţa dintre două populaţii sub aspectul variabilei de interes. Astfel, forma ipotezei de nul este H_0: $\mu_1 = \mu_2$ sau, echivalent, H_0: $\mu_1 - \mu_2 = 0$.

Ipoteza alternativă corespunde tipului de test, bilateral sau unilateral, intenţionat de cercetător. Pentru un test bilateral, ipoteza alternativă este de forma H_a: $\mu_1 \neq \mu_2$. Dacă testul este unilateral, atunci ipoteza de nul poate lua una dintre următoarele două forme:

$$H_a: \mu_1 > \mu_2;$$
$$H_a: \mu_1 < \mu_2;$$

Prima formă corespunde unui test unilateral în care întreaga zonă critică este plasată în extremitatea dreaptă a distribuţiei de eşantionare, iar cea de-a doua formă corespunde unui test unilateral în care întreaga zonă critică este plasată în extremitatea stângă a distribuţiei de eşantionare. Dacă rezultatul statisticii testului cade în zona critică, atunci ipoteza de nul poate fi respinsă, fiind acceptată ipoteza diferenţei sub aspectul variabilei de interes.

Teoretic, formula de calcul al testului scorurilor Z pentru diferenţa dintre două medii aritmetice este următoarea:

Formula 8.1. $$Z = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sigma_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}}$$

în care $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$ = diferenţa dintre mediile aritmetice ale eşantioanelor;

$\mu_1 - \mu_2$ = diferenţa dintre mediile aritmetice ale populaţiilor;

$\sigma_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}$ = abaterea standard a distribuţiei de eşantionare a diferenţelor dintre mediile aritmetice ale eşantioanelor.

În formula 8.1, cel de-al doilea termen al numărătorului, $\mu_1 - \mu_2$, este necunoscut. Acest termen se reduce însă la zero, întrucât testul are loc sub presupunerea că ipoteza de nul, $\mu_1 - \mu_2 = 0$, este adevărată. Mai departe, pentru eşantioane mari, distribuţia de eşantionare a diferenţelor dintre mediile aritmetice ale eşantioanelor se defineşte astfel:

$$\sigma_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n2}}$$

Întrucât valorile abaterilor standard ale populaţiilor, σ_1 şi σ_2, nu sunt aproape niciodată cunoscute, se utilizează abaterile standard ale eşantioanelor, cu corecţiile corespunzătoare pentru distorsiune. Astfel, formula

folosită pentru estimarea abaterii standard a distribuției de eșantionare în această situație este următoarea:

Formula 8.2. $\sigma\bar{x}_1 - \bar{x}_2 = \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1 - 1} + \frac{s_2^2}{n_2 - 1}}$

Prin urmare, vom lucra practic cu formula următoare pentru Z (obținut):

Formula 8.3. $Z = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1 - 1} + \frac{s_2^2}{n_2 - 1}}}$

Ca și până acum, vom considera un exemplu. Un cercetător presupune că bărbații și femeile diferă sub aspectul capacității de a rezolva probleme. Pentru a verifica această ipoteză, cercetătorul alcătuiește un eșantion aleatoriu de 127 de subiecți și le administrează un test de rezolvare de probleme. Eșantionul este apoi împărțit în două subeșantioane după criteriul sex, iar mărimile statistice sunt calculate pentru fiecare subeșantion, datele obținute fiind următoarele:

Eșantion 1 (bărbați)	Eșantion 2 (femei)
$\bar{X}_1 = 65$	$\bar{X}_2 = 62$
$s_1 = 12$	$s_2 = 14$
$n_1 = 65$	$n_2 = 62$

Presupunând că testul de rezolvare de probleme furnizează date de interval sau de raport, se poate aplica testul scorurilor Z pentru semnificația diferenței dintre două medii aritmetice. Se poate observa că scorul mediu al eșantionului 1 este mai mare decât cel al eșantionului 2. Prin aplicarea testului menționat se poate afla dacă această diferență este suficient de mare pentru a îndreptăți concluzia că există o diferență semnificativă între bărbați și femei sub aspectul capacității de a rezolva probleme și nu o intervenție a unor factori întâmplători.

Pasul 1. Enunțarea ipotezelor

$H_0: \mu_1 = \mu_2$

$H_a: \mu_1 \neq \mu_2$

Pasul 2. Selectarea distribuției de eșantionare și stabilirea zonei critice

Distribuția de eșantionare = Distribuția Z

$\alpha = 0{,}05$ (test bilateral)

$Z_{\alpha/2}$ (critic) $= \pm 1{,}96$

Pasul 3. Calcularea statisticii testului

$$Z = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1 - 1} + \frac{s_2^2}{n_2 - 1}}} = \frac{65 - 62}{\sqrt{\frac{12^2}{64} + \frac{14^2}{61}}} = \frac{3}{2{,}33} = +1{,}29$$

Pasul 4. Luarea deciziei

Întrucât Z (obținut) se află în zona critică ($+1{,}29 > +1{,}96$), ipoteza de nul poate fi respinsă, ceea ce reprezintă o dovadă în sprijinul ipotezei că bărbații și femeile diferă sub aspectul capacității de a rezolva probleme. Decizia de a respinge ipoteza de nul are o probabilitate de doar 0,05 de a fi greșită.

8.2. TESTUL SCORURILOR *t* PENTRU DIFERENȚA DINTRE DOUĂ MEDII ARITMETICE

Atunci când abaterile standard ale populațiilor nu sunt cunoscute și eșantioanele sunt mici ($n_1 < 30$ sau/și $n_2 < 30$), distribuția de eșantionare folosită este distribuția *t*-Student, cu $n_1 + n_2 - 2$ grade de libertate. Teoretic, formula de calcul al testului scorurilor *t* pentru diferența dintre două medii aritmetice este următoarea:

Formula 8.4. $$t = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sigma_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}}$$

Ca mai sus, termenul $\mu_1 - \mu_2$ se reduce la zero, întrucât testul are loc sub presupunerea că ipoteza de nul, $\mu_1 - \mu_2 = 0$, este adevărată. În cazul testului prezentat în această secțiune, formula folosită pentru estimarea abaterii standard a distribuției de eșantionare este următoarea:

Formula 8.5. $$\sigma_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = \sqrt{\frac{n_1 s_1^2 + n_2 s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}} \cdot \sqrt{\frac{n_1 + n_2}{n_1 n_2}}$$

Astfel, pentru a afla valoarea lui *t* (obținut) vom folosi următoarea formulă:

Formula 8.6. $$t = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{\frac{n_1 s_1^2 + n_2 s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}} \cdot \sqrt{\frac{n_1 + n_2}{n_1 n_2}}}$$

Este important de notat că testul scorurilor *t* pentru două medii aritmetice poate fi folosit doar dacă cele două populații sunt egal dispersate sau, altfel spus, au abaterile standard egale ($\sigma_1 = \sigma_2$). Această condiție este necesară pentru a justifica supoziția de normalitate a distribuției de eșantionare și a estima abaterea standard a acesteia. Egalitatea dispersiilor poate fi testată formal[1]. Pentru scopuri practice, putem considera că supoziția $\sigma_1 = \sigma_2$ este satisfăcută în măsura în care eșantioanele au dimensiuni apropiate[2].

Un cercetător presupune că o anumită metodă modernă de predare a matematicii conduce la rezultate mai bune decât metodele tradiționale. Pentru a verifica această ipoteză, cercetătorul alcătuiește un eșantion aleatoriu de 25 de elevi, pe care îl împarte aleatoriu în două grupe. Un grup de 12 elevi este repartizat într-o clasă în care matematica este predată după metoda modernă, iar celălalt grup de 13 elevi este repartizat într-o clasă în care matematica este predată după metode tradiționale. După un an, ambele grupuri primesc același test la matematică, obținând următoarele rezultate:

Grupul 1 (m. modernă)	Grupul 2 (m. tradițională)
$\overline{X}_1 = 8{,}80$ $s_1 = 1{,}70$	$\overline{X}_2 = 8{,}20$ $s_2 = 1{,}20$
$n_1 = 12$	$n_2 = 13$

Mediile aritmetice ale grupurilor diferă în sensul prezis ($\mu_1 > \mu_2$). Aplicarea testului *t* arată dacă această diferență este sau nu statistic semnificativă. Fie $\alpha = 0{,}05$.

Pasul 1. Enunțarea ipotezelor

$$H_0: \mu_1 = \mu_2$$
$$H_a: \mu_1 > \mu_2$$

[1] Vezi, de pildă, Hinkle, Wiersma și Jurs, 1988, p. 280-284.
[2] Vezi Healey, 1984.

Pasul 2. Selectarea distribuției de eșantionare și stabilirea zonei critice

Distribuția de eșantionare = Distribuția t

$\alpha = 0{,}05$ (test unilateral)

$gl = 12 + 13 - 2 = 23$

t_α (critic) = +1,714

Pasul 3. Calcularea statisticii testului

$$t = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{\frac{n_1 s_1^2 + n_2 s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}} \cdot \sqrt{\frac{n_1 + n_2}{n_1 n_2}}} = \frac{8{,}80 - 8{,}20}{\sqrt{\frac{12(1{,}70)^2 + 13(1{,}20)^2}{23}} \cdot \sqrt{\frac{25}{156}}} =$$

$$= \frac{0{,}60}{\sqrt{2{,}32} + \sqrt{0{,}16}} = \frac{0{,}60}{1{,}52 + 0{,}4} = \frac{0{,}60}{1{,}92} = +0{,}31$$

Pasul 4. Luarea deciziei

Întrucât t (obținut) nu se află în zona critică (+0,31 < +1,714), ipoteza de nul nu poate fi respinsă la un nivel de încredere de 95%. Diferența dintre cele două grupuri nu este statistic semnificativă.

8.3. TESTUL SCORURILOR Z PENTRU DIFERENȚA DINTRE DOUĂ PROPORȚII

Testul scorurilor Z pentru semnificația diferenței dintre două proporții este aplicabil atunci când eșantioanele sunt mari ($n_1 \geq 30$ și $n_2 \geq 30$) și este asemănător cu testul pentru medii aritmetice. Ipoteza de nul enunță că nu există nici o diferență semnificativă între populațiile din care sunt alcătuite eșantioanele, ipoteza alternativă putând fi direcțională sau non-direcțională.

Teoretic, formula de calcul al testului scorurilor Z pentru diferența dintre două proporții este următoarea:

Formula 8.7. $$Z = \frac{(p_1 - p_2) - (P_1 - P_2)}{\sigma p_1 - p_2}$$

în care $p_1 - p_2$ = diferența dintre proporțiile eșantioanelor;

$P_1 - P_2$ = diferența dintre proporțiile populațiilor;

$\sigma p_1 - p_2$ = abaterea standard a distribuției de eșantionare a diferențelor dintre proporțiile eșantioanelor.

Ca şi pentru medii aritmetice, cel de-al doilea termen al numărătorului, $P_1 - P_2$, se reduce la zero, întrucât testul are loc sub presupunerea că ipoteza de nul, $P_1 - P_2 = 0$, este adevărată. Formula folosită pentru estimarea abaterii standard a distribuţiei de eşantionare este următoarea:

Formula 8.8. $\sigma p_1 - p_2 = \sqrt{P^*(1-P^*)} \cdot \sqrt{\frac{n_1 + n_2}{n_1 n_2}}$

Cantitatea P^* se numeşte **estimare combinată a proporţiilor** pentru cele două populaţii şi este dată de următoarea formulă:

Formula 8.9. $P^* = \frac{n_1 p_1 + n_2 p_2}{n_1 + n_2}$

Prin urmare, pentru a afla valoarea lui Z (obţinut) vom folosi următoarea formulă:

Formula 8.10. $Z = \frac{p_1 - p_2}{\sqrt{P^*(1-P^*)} \cdot \sqrt{\frac{n_1 + n_2}{n_1 n_2}}}$

Să presupunem că au fost alcătuite două eşantioane de studenţi, unul de 83 de studenţi de la Universitatea *A* şi celălalt de 103 studenţi de la Universitatea *B*, fiecare student fiind chestionat în legătură cu problema interzicerii avorturilor şi clasificat într-una dintre categoriile: *De acord*, *Împotrivă*, *Nedecis*. Proporţia studenţilor care s-au declarat de acord cu interzicerea avorturilor a fost de 0,34 în primul eşantion (*A*) şi de 0,25 în cel de-al doilea (*B*). Există o diferenţă semnificativă între studenţii celor două universităţi sub acest aspect?

Eşantion 1 (*A*)	Eşantion 2 (*B*)
$p_1 = 0{,}34$	$p_2 = 0{,}25$
$n_1 = 83$	$n_2 = 103$

Pasul 1. Enunţarea ipotezelor

H_0: $P_1 = P_2$

H_a: $P_1 \neq P_2$

Pasul 2. Selectarea distribuţiei de eşantionare şi stabilirea zonei critice

Distribuţia de eşantionare = Distribuţia Z

$\alpha = 0{,}05$ (test bilateral)

$Z_{\alpha/2}$ (critic) = $\pm 1{,}96$

Pasul 3. Calcularea statisticii testului

$$P^* = \frac{n_1 p_1 + n_2 p_2}{n_1 + n_2} = \frac{83(0,34) + 103(0,25)}{83 + 103} = \frac{28,22 + 25,75}{186} = \frac{53,97}{186} = 0,29$$

$$Z = \frac{p_1 - p_2}{\sqrt{P^*(1-P^*)} \cdot \sqrt{\frac{n_1 + n_2}{n_1 n_2}}} = \frac{0,34 - 0,25}{\sqrt{0,29(1-0,29)} \cdot \sqrt{\frac{83+103}{83 \cdot 103}}} = \frac{0,09}{0,07} = +1,29$$

Pasul 4. Luarea deciziei

Întrucât *Z* (obținut) nu cade în zona critică (+1,29 < +1,69), nu se poate respinge ipoteza de nul. Studenții de la cele două universități nu diferă semnificativ în privința acordului cu interzicerea avorturilor.

GLOSAR

Eșantioane aleatorii independente: eșantioane aleatorii alcătuite în așa fel încât selectarea cazurilor pentru un eșantion nu influențează selectarea cazurilor pentru celălalt eșantion.

BCU IAȘI/CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

9. ANALIZA DE VARIANȚĂ (ANOVA)

Am expus până acum proceduri pentru testarea ipotezelor privind o populație sau două populații. În acest capitol vom expune o procedură de testare a ipotezei conform căreia mediile aritmetice ale k populații ($k \geq 2$) sunt egale. Această procedură este numită **analiza de varianță** (ANOVA[1]). Ipoteza de nul testată în ANOVA are următoarea formă:

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_n$$

Conform ipotezei alternative, H_a, cel puțin o medie aritmetică diferă de celelalte.

9.1. ANOVA PENTRU O VARIABILĂ INDEPENDENTĂ

Un cercetător presupune că subiecții supuși unui interviu vor furniza cu atât mai multe informații cu caracter personal cu cât se află mai aproape de intervievator. Pentru a verifica această presupunere, cercetătorul efectuează un experiment la care participă 15 subiecți. Fiecare subiect primește aceleași întrebări de la același intervievator. Variabila independentă (A) este *distanța față de intervievator*, cu următoarele categorii: *mică* (0,5 metri), *medie* (1,5 metri), *mare* (2 metri). Pentru a fi intervievați, subiecții sunt repartizați aleatoriu într-una dintre cele trei categorii ale variabilei independente. Variabila dependentă (B) este *numărul de răspunsuri cu caracter personal date de subiect*. Datele obținute, împreună cu mărimile necesare pentru ANOVA, sunt prezentate în următorul tabel:

Tabelul 9.1. Calcule inițiale pentru ANOVA, o variabilă independentă

Distanța față de intervievator		
Mică	Medie	Mare
33	21	20
24	25	13
31	19	15
29	27	10
34	26	14

[1] Prescurtarea uzuală de la denumirea procedurii în limba engleză: „Analysis of Variance".

Distanța față de intervievator		
Mică	Medie	Mare
$T_1 = 151$	$T_2 = 118$	$T_3 = 72$
$n_1 = 5$	$n_2 = 5$	$n_3 = 5$
$\overline{X}_1 = 30{,}20$	$\overline{X}_2 = 23{,}60$	$\overline{X}_3 = 14{,}40$
$\Sigma X_1^2 = 4623$	$\Sigma X_2^2 = 2832$	$\Sigma X_3^2 = 1090$
$T_1^2 = 22801$	$T_2^2 = 13294$	$T_3^2 = 5184$

Pentru fiecare grup i, T_i este totalul scorurilor individuale, n_i este numărul de subiecți, $\overline{X}_i$ este media aritmetică a scorurilor, ΣX_i^2 este suma pătratelor scorurilor individuale, iar T_i^2 este pătratul totalului scorurilor. De notat că grupurile obținute sunt independente, precum și că formulele de calcul care urmează sunt aplicabile și în cazul în care este vorba despre un număr diferit de subiecți în fiecare grup.

În ANOVA, pentru o variabilă independentă se consideră două *surse de variație*: (i) variația mediilor aritmetice ale grupurilor și (ii) variația datorată diferențelor dintre subiecții din fiecare grup, care poate fi atribuită procesului de eșantionare. Pentru început, se calculează trei **sume de pătrate ale abaterilor față de medie** sau, pe scurt, **sume de pătrate**. Vom desemna generic prin *SS* aceste sume de pătrate[2]: (1) SS_{TOTAL} – suma pătratelor abaterilor fiecărui scor individual față de media aritmetică a tuturor scorurilor, numită și *marea medie*; (2) SS_A – suma pătratelor abaterilor fiecărei medii de grup față de marea medie; (3) SS_{EROARE} – suma pătratelor abaterilor fiecărui scor individual față de media aritmetică a grupului respectiv. Litera „*A*" din SS_A arată că lucrăm cu varianța sistematică a variabilei independente *A*. SS_A reflectă prima sursă de variație, iar SS_{EROARE} pe cea de-a doua.

Putem calcula aceste abateri direct pe baza datelor din tabel. Întrucât astfel de calcule sunt greoaie, vom utiliza formule simplificate.

Formula 1. $SS_{TOTAL} = \Sigma X^2 - \frac{G^2}{N}$

în care ΣX^2 = suma pătratelor scorurilor individuale ale tuturor subiecților din experiment = $\Sigma X_1^2 + \Sigma X_2^2 + \Sigma X_3^2$;

G^2 = pătratul totalului tuturor scorurilor = $(T_1 + T_2 + T_3)^2$;

[2] Prescurtarea uzuală de la denumirea din limba engleză „Sum of squares".

N = numărul total de subiecți din experiment.

Dacă se efectuează calculele pe hârtie sau cu un calculator de buzunar, este convenabil să se afle mai întâi ΣX^2 pentru scorurile din fiecare grup, așa cum am făcut în tabelul de mai sus, după care să se adune aceste sume. Aplicăm formula 1:

$$SS_{TOTAL} = \Sigma X^2 - \frac{G^2}{N} = (4623 + 2823 + 1090) - \frac{(151 + 118 + 72)^2}{15} =$$

$$= 8545 - 7752{,}07 = 792{,}93$$

Atunci când calculăm SS_{TOTAL} este recomandabil să reținem termenii diferenței, 8545 și 7752,07, pe care îi vom folosi pentru simplificarea calculelor ulterioare.

Odată ce am calculat SS_{TOTAL}, putem calcula SS_A după următoarea formulă:

Formula 2. $SS_A = \Sigma \frac{T_i^2}{n_i} - \frac{G^2}{n}$

În această formulă, T_i este un simbol general pentru T_1, T_2 și T_3, iar n_i este un simbol general pentru n_1, n_2 și n_3. Astfel, odată ce cantitatea T_i^2 / n_i este calculată pentru fiecare grup, cantitățile sunt adunate, după cum arată simbolul Σ. Să notăm că a doua parte a formulei 2, G^2/N, a fost deja calculată, atunci când am obținut SS_{TOTAL}, așa că vom prelua direct rezultatul respectiv în calculul SS_A:

$$SS_A = \Sigma \frac{T_i^2}{n_i} - \frac{G^2}{n} = \left(\frac{T_1^2}{n_1} + \frac{T_2^2}{n_2} + \frac{T_3^2}{n_3} \right) - \frac{G^2}{N} =$$

$$= \left(\frac{151^2}{5} + \frac{118^2}{5} + \frac{72^2}{5} \right) - 7752{,}07 = 8381{,}80 - 7752{,}07 = 629{,}73$$

Și aici vom reține unul dintre termenii diferenței, și anume 8381,80, pe care îl vom folosi pentru calculul SS_{EROARE}, după următoarea formulă:

Formula 3. $SS_{EROARE} = \Sigma X^2 - \Sigma \frac{T_i^2}{n_i}$

Ambele cantități cerute de această formulă au fost calculate anterior, când am obținut SS_{TOTAL} și, respectiv, SS_A, așa că vom prelua direct rezultatele respective în calculul SS_{EROARE}:

$$SS_{EROARE} = \sum X^2 - \sum \frac{T_i^2}{n_i} = 8545 - 8381{,}80 = 163{,}20$$

De notat că $SS_{TOTAL} = SS_A + SS_{EROARE}$. Această relație poate fi utilizată pentru a controla corectitudinea calculelor.

Pasul următor în calculul ANOVA constă în calcularea a două **medii aritmetice ale sumelor de pătrate ale abaterilor față de medie** sau, pe scurt, **medii aritmetice ale sumelor de pătrate**. Vom desemna generic prin *MS* aceste medii[3]: (1) MS_A – media aritmetică pentru SS_A, numită *varianța sistematică*, și (2) MS_{EROARE} – media aritmetică pentru SS_{EROARE}, numită *varianța de eroare*.

Formula 4. $MS_A = \frac{SS_A}{k-1}$

În această formulă, k este numărul de grupuri, $k - 1$ fiind numărul de grade de libertate asociate SS_A, pe care îl vom nota în continuare cu gl_A.

$$MS_A = \frac{SS_A}{k-1} = \frac{629{,}73}{3-1} = \frac{629{,}73}{2} = 314{,}87$$

Formula 5. $MS_{EROARE} = \frac{SS_{EROARE}}{N-k}$

Aici, $N - k$ reprezintă numărul de grade de libertate asociate SS_{EROARE}, pe care îl vom nota în continuare cu gl_{EROARE}.

$$MS_{EROARE} = \frac{SS_{EROARE}}{N-k} = \frac{163{,}20}{15-3} = \frac{163{,}20}{12} = 13{,}60$$

Distribuția de eșantionare în ANOVA este distribuția *F* (numită astfel în onoarea britanicului Ronald Fisher (1890-1962), biolog și statistician, inventatorul ANOVA). Forma aproximativă a unei curbe *F* este următoarea:

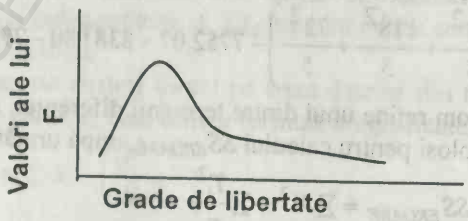


Figura 9.1. Un exemplu de curbă *F*

[3] Prescurtarea uzuală de la denumirea din limba engleză „Mean squares".

Forma exactă a unei curbe F depinde de valorile pentru gl_A şi, respectiv, pentru gl_{EROARE}. De notat că folosirea distribuţiei F cere ca variabila dependentă să fie normal distribuită în cele k populaţii şi ca aceste populaţii să fie egal dispersate[4]. În **tabelul distribuţiei** F (vezi Anexa D) în prima coloană din stânga sunt trecute gradele de libertate pentru MS_{EROARE} ($gl_{EROARE} = N - k$), de la 1 la 200 şi ∞. Pe cea de-a doua coloană din stânga apar nivelurile α. Pe primul rând al tabelului apar gradele de libertate pentru MS_A ($gl_A = k - 1$), de la 1 la 120 şi ∞.

gl_{EROARE} (gl2)		gl_A (gl1)			
	α	1	2	120	∞
1	0,25	.....			
	0,10	.....			
	0,05	.....			
2	.	.....			
.	.	.....			
.	.	.....			
120	.	.....			
.	.	.....			
.	.	.....			
∞	.	.....			

Figura 9.2. Schema tabelului valorilor critice ale distribuţiei F

La intersecţia rândului pentru $N - k$ grade de libertate şi nivelul α ales cu coloana pentru $k - 1$ grade de libertate se găseşte F (critic), adică valoarea care marchează începutul zonei critice în distribuţia F. În exemplul nostru, pentru $N - k = 12$ şi $k - 1 = 2$, alegând un nivel $\alpha = 0{,}05$, F (critic) = 3,89. Valoarea pentru F (obţinut) se calculează cu formula următoare:

Formula 6. $$F = \frac{MS_A}{MS_{EROARE}}$$

Dacă intervin doar factori întâmplători, valoarea aşteptată pentru F (obţinut) este 1,0. Cu cât este mai mare valoarea pentru F (obţinut), cu atât este mai mică probabilitatea ca rezultatele experimentului să se datoreze întâmplării. Regula de decizie este următoarea:

---

[4] De notat că supoziţia omogenităţii dispersiei şi cea a normalităţii distribuţiei, împreună cu ipoteza de nul, „spun" că distribuţiile la nivelul populaţiilor au aceeaşi formă, aceeaşi medie aritmetică şi aceeaşi abatere standard sau, cu alte cuvinte, că este vorba despre una şi aceeaşi populaţie.

se respinge H_0, dacă F (obținut) F (critic).

În exemplul nostru,

$$F = \frac{MS_A}{MS_{EROARE}} = \frac{314,87}{13,60} = 23,15$$

Întrucât F (obținut) cade în zona critică (23,15 > 3,89), vom conchide că rezultatele experimentului sunt semnificative și vom respinge ipoteza că mediile aritmetice sunt egale la nivelul populației.

În termenii modelului în patru pași, testul ANOVA pentru o variabilă independentă, în exemplul nostru, decurge după cum urmează:

Pasul 1. Enunțarea ipotezelor

H_0: $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$;

H_a: Cel puțin o medie aritmetică diferă de celelalte.

Pasul 2. Selectarea distribuției de eșantionare și stabilirea zonei critice

Distribuția de eșantionare = Distribuția F

$\alpha = 0,05$

$gl_{EROARE} = N - k = 12$

$gl_A = k - 1 = 2$

Pasul 3. Calcularea statisticii testului

Organizarea calculului ANOVA se face cu ajutorul unui tabel de calcule inițiale (v. tabelul 9.1), precum și al unui tabel ANOVA rezumativ, numit **tabel al surselor de variație**. Forma generală a unui astfel de tabel este următoarea:

Sursa de variație	Sume de pătrate	Grade de libertate	Medii ale sumelor	F (obținut)
A	SS_A	$k - 1$	MS_A	MS_A/MS_{EROARE}
EROARE	SS_{EROARE}	$N - k$	MS_{EROARE}	
TOTAL	SS_{TOTAL}	$N - 1$		

În exemplul nostru, avem următorul tabel:

Tabelul 9.2. ANOVA rezumativ, o variabilă independentă

Sursa de variație	Sume de pătrate	Grade de libertate	Medii ale sumelor	*F* (obținut)
A	629,73	2	314,87	23,15
EROARE	163,20	12	13,60	
TOTAL	792,93	14		

Pasul 5. Luarea deciziei

Întrucât *F* (obținut) cade în zona critică (23,15 > 3,89), ipoteza de nul este respinsă. La nivelul populației, mediile aritmetice ale scorurilor corespunzătoare celor trei distanțe diferă semnificativ. Enunțul de probabilitate asociat acestei concluzii este următorul: probabilitatea ca diferența observată între mediile aritmetice ale grupurilor să apară din întâmplare, dacă H_0 ar fi în realitate adevărată, este mai mică de 0,05.

De notat că în cazul în care se consideră mai mult de două categorii ale variabilei independente (ca în exemplul nostru în care avem trei grupuri), *F* (obținut) nu arată care este grupul care diferă semnificativ de celelalte. O modalitate de a examina diferența dintre două grupuri este de a utiliza formula SS_A pentru a calcula suma pătratelor și media sumei de pătrate pentru cele două grupuri (numărul de grade de libertate în acest caz fiind 2 – 1) și de a utiliza cantitatea MS_{EROARE}, calculată anterior, ca eroare de varianță pentru calcularea *F* (obținut). Au fost dezvoltate și metode mai sofisticate pentru a evalua diferența dintre două grupuri, după ce s-a determinat un *F* (obținut) semnificativ, numite *teste de comparare multiplă post hoc*, precum și metode de testare a unor ipoteze specifice privind diferențele dintre medii, numite *comparații a priori* sau *comparații planificate*[5].

9.2. ANOVA PENTRU DOUĂ VARIABILE INDEPENDENTE

Testul ANOVA pentru două variabile independente este o extindere a testului ANOVA pentru o singură variabilă independentă, cu excepția faptului că formulele testului expus în această secțiune sunt aplicabile doar în cazul grupurilor independente cu același număr de subiecți în fiecare grup. Vom folosi aceeași manieră de expunere ca mai sus: vom prezenta un exemplu ipotetic, un tabel de calcule inițiale, formulele de calcul ale testului ANOVA pentru două variabile independente, precum și modelul în PATRU pași specific acestui test.

---

[5] Vezi Hinkle, Wiersma și Jurs, 1988.

20 de elevi sunt supuşi unui experiment privind metodele de instruire în matematică. Variabila independentă, *A*, este, deci, *metoda de instruire*. Elevii sunt repartizaţi aleatoriu în două clase: o clasă la care se utilizează metoda tradiţională (*A1*) şi o clasă la care se utilizează o metodă modernă (*A2*). Variabila independentă, *B*, este *nivelul IQ*, cu categoriile : *B1* (< 90) şi *B2* (≥ 90). Informaţia prezentată la cele două clase este aceeaşi. La sfârşitul perioadei de instruire elevii dau acelaşi test. Rezultatul (scorul) obţinut la acest test este variabila dependentă. Experimentul permite evaluarea a trei efecte: (i) efectul principal al variabilei *A* (dacă una dintre metode conduce la rezultate diferite faţă de cealaltă), (ii) efectul principal al variabilei *B* (dacă elevii cu un IQ superior obţin rezultate diferite faţă de ceilalţi), (iii) interacţiunea $A \times B$ (dacă efectul unei variabile independente diferă în funcţie de un anumit nivel al celeilalte variabile independente).

După cum reiese şi din cele de mai sus, un astfel de experiment are mai multe avantaje. Mai întâi, prin analiza simultană a două variabile independente se realizează, de fapt, două cercetări altfel distincte. În plus faţă de investigarea modului în care diferitele categorii ale celor două variabile independente afectează variabila dependentă, se poate verifica dacă nivelurile uneia dintre variabilele independente afectează variabila dependentă în acelaşi fel ca şi nivelurile celeilalte variabile independente. Apoi, este vorba despre investigarea interacţiunii dintre două variabile independente. Întrucât, în situaţiile reale, efectul unei variabile independente este adesea afectat de una sau mai multe variabile independente, studiul interacţiunii dintre variabilele independente poate fi un obiectiv foarte important al cercetării.

Revenind la exemplul nostru ipotetic, datele obţinute, împreună cu mărimile necesare pentru ANOVA, sunt prezentate în următorul tabel:

Tabelul 9.3. Calcule iniţiale pentru ANOVA, două variabile independente

Metoda (*A*)	Nivelul IQ (*B*)		
	B1	*B2*	
Tradiţională (*A1*)	75	90	
	70	95	
	69	89	
	72	85	
	68	91	
	$T_{A1B1} = 354$	$T_{A1B2} = 450$	
	$n_{A1B1} = 5$	$n_{A1B2} = 5$	$T_{A1} = 804$
	$\overline{X}_{A1B1} = 70{,}80$	$\overline{X}_{A1B2} = 90{,}00$	$n_{A1} = 10$
	$\Sigma X^2_{A1B1} = 25.094$	$\Sigma X^2_{A1B2} = 40.552$	$\overline{X}_{A1} = 80{,}40$

Modernă (*A2*)	85 87 83 90 89	87 94 93 89 92	$T_{A2} = 788$ $n_{A2} = 10$ $\overline{X}_{A2} = 88{,}90$
	$T_{A2B1} = 434$ $n_{A2B1} = 5$ $\overline{X}_{A2B1} = 86{,}80$ $\Sigma X^2_{A2B1} = 37.704$	$T_{A2B2} = 455$ $n_{A2B2} = 5$ $\overline{X}_{A2B2} = 91{,}00$ $\Sigma X^2_{A2B2} = 41.439$	
	$T_{B1} = 788$ $n_{B1} = 10$ $\overline{X}_{B1} = 78{,}80$	$T_{B2} = 905$ $n_{B2} = 10$ $\overline{X}_{B2} = 90{,}50$	

În ANOVA, pentru două variabile independente se testează trei ipoteze de nul, fiecare corespunzând unei surse de variație:

H_{01}: La nivelul populației nu există nici o diferență între mediile aritmetice ale rezultatelor obținute prin cele două metode.

H_{02}: La nivelul populației nu există nici o diferență între mediile aritmetice ale rezultatelor obținute de elevii cu niveluri IQ diferite.

H_{03}: La nivelul populației nu există interacțiune între cele două variabile.

H_{01} corespunde variației mediilor aritmetice ale scorurilor variabilei dependente din fiecare categorie a variabilei *A*. H_{02} corespunde variației mediilor aritmetice ale scorurilor variabilei dependente din fiecare categorie a variabilei *B*. H_{03} corespunde variației mediilor aritmetice ale scorurilor variabilei dependente din categoriile combinate $A \times B$.

În acest caz, se calculează cinci sume de pătrate: (1) SS_{TOTAL}, (2) SS_A, (3) SS_B,

(4) $SS_{A \times B}$ și (5)SS_{EROARE}.

SS_{TOTAL} se calculează cu ajutorul formulei 1:

$$SS_{TOTAL} = \Sigma X^2 - \frac{G^2}{N} = \left(\Sigma X^2_{A1B1} + \Sigma X^2_{A1B2} + \Sigma \frac{X^2_{A2B1} +}{\Sigma^2_{A2B2}} \right) -$$

$$-\frac{(T_{A1B1}+T_{A1B2}+T_{A2B1}+T_{A2B2})^2}{N}=(25.094+40.552+37.704+41.439)-$$

$$-\frac{(354+450+434+455)^2}{20}=144.789-143.312,45=1476,55$$

Și aici, atunci când calculăm SS_{TOTAL}, este recomandabil să reținem termenii diferenței, 144.789 și 143.312,45, pe care îi vom folosi pentru simplificarea calculelor ulterioare.

Formula 2 este modificată corespunzător pentru calculul SS_A și SS_B. Astfel, SS_A se calculează cu ajutorul următoarei formule:

Formula 7. $SS_A=\sum\frac{T_a^2}{n_a}-\frac{G^2}{n}$

În această formulă, T_a este un simbol general pentru T_{A1} și T_{A2}, iar n_a este un simbol general pentru n_{A1} și n_{A2}. Prin urmare, atunci când calculăm SS_A, luăm în considerare doar grupurile variabilei independente A.

$$SS_A=\sum\frac{T_a^2}{n_a}-\frac{G^2}{n}=\left(\frac{T_{A1}^2}{n_{A1}}+\frac{T_{A2}^2}{n_{A2}}\right)-\frac{G^2}{N}=\left(\frac{804^2}{10}+\frac{889^2}{10}\right)-143.312,45=$$

$$=143.673,70-143.312,45=361,25$$

SS_B se calculează cu ajutorul următoarei formule:

Formula 8. $SS_B=\sum\frac{T_b^2}{n_b}-\frac{G^2}{n}$

În această formulă, T_b este un simbol general pentru T_{B1} și T_{B2}, iar n_b este un simbol general pentru n_{B1} și n_{B2}. Prin urmare, atunci când calculăm SS_B, luăm în considerare doar grupurile variabilei independente B.

$$SS_B=\sum\frac{T_B^2}{n_B}-\frac{G^2}{n}=\left(\frac{T_{B1}^2}{n_{B1}}+\frac{T_{B2}^2}{n_{B2}}\right)-\frac{G^2}{N}=\left(\frac{788^2}{10}+\frac{905^2}{10}\right)-143.312,45=$$

$$=143.996,90-143.312,45=684,45$$

Calculăm acum $SS_{A\times B}$, cu ajutorul următoarei formule:

Formula 9. $SS_{A\times B}=\sum\frac{T_{ab}^2}{n_{ab}}-\frac{G^2}{N}-SS_A-SS_B$

În această formulă, T_{ab} este un simbol general pentru T_{A1B1}, T_{A1B2}, T_{A2B1} și T_{A2B2}, iar n_{ab} este un simbol general pentru n_{A1B1}, n_{A1B2}, n_{A2B1} și n_{A2B2}. Prin urmare, atunci când calculăm $SS_{A\times B}$, luăm în considerare grupurile constituite după categoriile combinate

$A \times B$.

$$SS_{A\times B} = \left(\frac{T^2_{A1B1}}{n_{A1B1}} + \frac{T^2_{A1B2}}{n_{A1B2}} + \frac{T^2_{A2B1}}{n_{A2B1}} + \frac{T^2_{A2B2}}{n_{A2B2}}\right) - \frac{G^2}{N} - SS_A - SS_B =$$

$$= \left(\frac{354^2}{5} + \frac{450^2}{5} + \frac{434^2}{5} + \frac{455^2}{5}\right) - 143.312{,}45 - 361{,}25 - 684{,}25 =$$

$$= 144.639{,}40 - 143.312{,}45 - 361{,}25 - 684{,}45 = 281{,}25$$

Şi aici vom reține unul dintre termenii diferenței, și anume 144.639,40, pe care îl vom folosi pentru calculul SS_{EROARE}, după următoarea formulă:

Formula 10. $SS_{EROARE} = \sum X^2 - \sum \frac{T^2_{ab}}{n_{ab}}$

Ambele cantități cerute de această formulă au fost calculate anterior, când am obținut SS_{TOTAL} și, respectiv, $SS_{A \times B}$, așa că vom prelua direct rezultatele respective în calculul SS_{EROARE}:

$$SS_{EROARE} = \sum X^2 - \sum \frac{T^2_{ab}}{n_{ab}} = 144.789 - 144639{,}40 = 149{,}60$$

De notat că $SS_{TOTAL} = SS_A + SS_B + SS_{A \times B} + SS_{EROARE}$. Această relație poate fi utilizată pentru a controla corectitudinea calculelor.

Mediile aritmetice ale sumelor de pătrate pentru fiecare sursă de varianță se calculează prin împărțirea sumei de pătrate respectivă la numărul corespunzător de grade de libertate.

Formula 11. $MS_A = \frac{SS_A}{k_A - 1}$

În această formulă, k_A este numărul de grupuri constituite după categoriile variabilei A, iar $k_A - 1$ este numărul de grade de libertate asociate SS_A, notat cu gl_A. În exemplul nostru,

$$MS_A = \frac{SS_A}{k_A - 1} = \frac{361{,}25}{2-1} = 361{,}25$$

Formula 12. $MS_B = \frac{SS_B}{k_B - 1}$

În formula 12, $k_B - 1$ este numărul de grupuri constituite după categoriile variabilei B, iar $k_B - 1$ este numărul de grade de libertate asociate SS_B, notat cu gl_B. În exemplul nostru,

$$MS_B = \frac{SS_B}{k_B - 1} = \frac{684,45}{2-1} = 684,45$$

Formula 13. $MS_{A\times B} = \dfrac{SS_{A\times B}}{(k_A - 1)(k_B - 1)}$

În formula 13, $(k_A - 1)(k_B - 1)$ este numărul de grade de libertate asociat $SS_{A \times B}$, notat cu $gl_{A \times B}$. În exemplul nostru,

$$MS_{A\times B} = \frac{SS_{A\times B}}{(k_A - 1)(k_B - 1)} = \frac{281,25}{(2-1)(2-1)} = 281,25$$

Formula 14. $MS_{EROARE} = \dfrac{SS_{EROARE}}{N - k_A k_B}$

În formula 14, $N - k_A k_B$ este numărul de grade de libertate asociat SS_{EROARE}, notat cu gl_{EROARE}.

$$MS_{EROARE} = \frac{SS_{EROARE}}{N - k_A k_B} = \frac{149,60}{20-4} = \frac{149,60}{16} = 9,35$$

Valoarea pentru F (obținut) se calculează pentru fiecare sursă de variantă sistematică (efectele principale pentru A, pentru B și pentru interacțiunea $A \times B$). Prezentăm în continuare formulele de calcul pentru F_A (obținut), F_B (obținut) și $F_{A\times B}$ (obținut), împreună cu calculele respective, corespunzătoare exemplului nostru.

Formula 15. $F_A = \dfrac{MS_A}{MS_{EROARE}}$

$$F_A = \frac{MS_A}{MS_{EROARE}} = \frac{361,25}{9,35} = 38,64$$

Formula 16. $F_B = \dfrac{MS_B}{MS_{EROARE}}$

$$F_B = \frac{MS_B}{MS_{EROARE}} = \frac{684,45}{9,35} = 30,08$$

Formula 17. $F_{A\times B} = \dfrac{MS_{A\times B}}{MS_{EROARE}}$

$$F_{A\times B} = \frac{MS_{A\times B}}{MS_{EROARE}} = \frac{281,25}{9,35} = 30,08$$

Pentru luarea deciziei, fiecare valoare pentru F (obținut) se compară cu F (critic). Întrucât în fiecare caz din exemplul nostru, $gl_{EROARE} = 16$, iar numărul de grade de libertate din numărător pentru media aritmetică este egal cu 1 ($gl_A = gl_B = gl_{A \times B} = 1$), pentru $\alpha = 0,05$, F (critic) = 4,49[6]. Deoarece fiecare F (obținut) este mai mare decât F (critic), toate cele trei ipoteze de nul pot fi respinse. De notat că toate cele trei ipoteze de nul pot fi respinse (rezultatele experimentului sunt semnificative) și pentru $\alpha = 0,01$, pentru care F (critic) = 8,53.

În termenii modelului în patru pași, testul ANOVA pentru două variabile independente decurge astfel:

Pasul 1. Enunțarea ipotezelor

H_{01}: La nivelul populației nu există nici o diferență între mediile aritmetice ale rezultatelor obținute prin cele două metode.

H_{a1}: La nivelul populației mediile aritmetice ale rezultatelor obținute prin cele două metode diferă.

H_{02}: La nivelul populației nu există nici o diferență între mediile aritmetice ale rezultatelor obținute de elevii cu niveluri *IQ* diferite.

H_{a2}: La nivelul populației mediile aritmetice ale rezultatelor obținute de elevii cu niveluri *IQ* diferite variază.

H_{03}: La nivelul populației nu există interacțiune între cele două variabile.

H_{a3}: La nivelul populației există interacțiune între cele două variabile.

Pasul 2. Selectarea distribuției de eșantionare și stabilirea zonelor critice

Distribuția de eșantionare = distribuția F

$\alpha = 0,05$

$gl_{EROARE} = 16$

$gl_A = gl_B = gl_{A \times B} = 1$

F (critic)[7] = 4,49

Pasul 3. Calcularea statisticii testului

Organizarea calculului ANOVA pentru două variabile independente se face cu ajutorul unui tabel de calcule inițiale (v. tabelul 9.3), precum și al

---

[6] Evident, dacă gl_A, gl_B și $gl_{A \times B}$ diferă două câte două, vom avea trei valori pentru F_{critic}.

[7] De notat că în cazul în care cele trei grade de libertate ar fi fost diferite, am fi avut trei valori pentru F (critic).

unui tabel ANOVA rezumativ (*tabel al surselor de variație*). În acest caz, forma generală a unui astfel de tabel este următoarea:

Sursa de variație	Sume de pătrate	Grade de libertate	Medii ale sumelor	F (obținut)
A	SS_A	$k_A - 1$	MS_A	MS_A/MS_{EROARE}
B	SS_B	$k_B - 1$	MS_B	MS_B/MS_{EROARE}
$A \times B$	$SS_{A \times B}$	$(k_A - 1)(k_B - 1)$	$MS_{A \times B}$	$MS_{A \times B}/MS_{EROARE}$
EROARE	SS_{EROARE}	$N - k_A k_B$	MS_{EROARE}	
TOTAL	SS_{TOTAL}	$N - 1$		

În exemplul nostru, avem următorul tabel:

Tabelul 9.4. ANOVA rezumativ, două variabile independente

Sursa de variație	Sume de pătrate	Grade de libertate	Medii ale sumelor	F (obținut)
A	361,25	1	361,25	38,64
B	684,45	1	684,45	73,20
$A \times B$	281,25	1	281,25	30,08
EROARE	149,60	16	9,35	
TOTAL	1476,55	19		

Pasul 4. Luarea deciziei

Întrucât fiecare valoare pentru F (obținut) este mai mare decât valoarea pentru F (critic), se resping cele trei ipoteze de nul. Pentru efectul principal al variabilei A, concluzia este că, la nivelul populației, mediile aritmetice ale rezultatelor obținute prin cele două metode diferă semnificativ. Pentru efectul principal al variabilei B, concluzia este că, la nivelul populației, mediile aritmetice ale rezultatelor obținute de elevii cu niveluri IQ diferite variază semnificativ. Enunțul de probabilitate asociat ambelor concluzii este următorul: probabilitatea ca diferențele observate între mediile aritmetice ale grupurilor constituite după categoriile unei variabile independente să apară din întâmplare, dacă H_0 respectivă ar fi în realitate adevărată, este mai mică de 0,05 (și după cum am văzut, chiar decât 0,01).

Pentru interacțiune, concluzia este că la nivelul populației există o interacțiune între metoda de instruire și nivelul IQ al subiecților. Enunțul de probabilitate asociat acestei concluzii este următorul: probabilitatea ca diferențele observate între mediile aritmetice ale scorurilor din categoriile combinate ale celor două variabile să apară din întâmplare, dacă H_{03} ar fi în realitate adevărată, este mai mică de 0,05 (și decât 0,01).

9.3. ANOVA PENTRU EŞANTIOANE DEPENDENTE

Calculele ANOVA considerate până acum sunt aplicabile doar în cazul eşantioanelor independente. În această secţiune vom prezenta calculele ANOVA pentru cazul eşantioanelor dependente. Amintim că în acest caz este vorba fie despre alcătuirea unor eşantioane, astfel încât selectarea cazurilor pentru un eşantion influenţează selectarea cazurilor pentru un alt eşantion, fie despre situaţiile experimentale în care aceiaşi subiecţi sunt testaţi repetat.

Un cercetător presupune că atractivitatea fizică a candidaţilor la obţinerea unei slujbe influenţează judecata asupra competenţei profesionale a candidaţilor. Variabila independentă este deci atractivitatea fizică a candidaţilor, variabila dependentă fiind judecata asupra competenţei profesionale, măsurată pe o scală cu zece puncte. Cercetătorul alcătuieşte un eşantion aleatoriu cu opt subiecţi şi le prezintă două filme, în fiecare film apărând o femeie care răspunde la un test de aptitudini mecanice (îmbinarea unor piese). Cele două femei îndeplinesc sarcinile testului la fel de bine, dar una dintre ele este atractivă fizic, în timp ce cealaltă nu este atractivă fizic. Filmele sunt prezentate de mai multe ori, pentru a se controla efectul ordonării. Datele obţinute, împreună cu mărimile necesare pentru ANOVA sunt prezentate în următorul tabel:

Tabelul 9.5. Calcule iniţiale pentru ANOVA, eşantioane dependente

Subiecţi	Atractivitatea fizică (A)		T_s	T_s^2
	Neatractive ($A1$)	Atractive ($A2$)		
1	6	8	14	196
2	5	6	11	121
3	5	9	14	196
4	7	6	13	169
5	4	6	10	100
6	3	5	8	64
7	5	5	10	100
8	4	7	11	121
	$T_{A1} = 39$ $\Sigma^2_{A1} = 201$ $n_{A1} = 8$ $\overline{X}_{A1} = 4{,}88$	$T_{A2} = 52$ $\Sigma^2_{A2} = 352$ $n_{A2} = 8$ $\overline{X}_{A2} = 6{,}50$		$\Sigma T_s^2 = 1067$

În acest tabel, T_s se referă la totalul scorurilor acordate de fiecare subiect pentru cele două femei, T_s^2 este pătratul acestui total, iar ΣT_s^2 este suma acestor pătrate pentru toți subiecții.

Principala diferență dintre ANOVA pentru eşantioane dependente şi ANOVA pentru o variabilă independentă constă în aceea că efectul diferențelor dintre subiecți devine o sursă de varianță. În ANOVA pentru eşantioane dependente apar patru surse de varianță, deci se calculează patru sume de pătrate: (1) SS_{TOTAL}, (2) SS_A, (3) $SS_{SUBIECTI}$ şi (4) SS_{EROARE}. SS_{TOTAL} se calculează cu ajutorul formulei 1:

$$SS_{TOTAL} = \Sigma X^2 - \frac{G^2}{N} = (201 + 352) - \frac{(39+52)^2}{16} = 553 - 517{,}56 = 35{,}44$$

SS_A se calculează cu ajutorul formulei 7:

$$SS_A = \Sigma \frac{T_a^2}{n_a} - \frac{G^2}{n} = \frac{39^2 + 52^2}{8} - 517{,}56 = 10{,}57$$

$SS_{SUBIECTI}$ se calculează cu ajutorul următoarei formule:

Formula 18. $SS_{SUBIECTI} = \Sigma \frac{T_S^2}{n_S} - \frac{G^2}{n}$

Termenul n_S se referă la numărul de eşantioane dependente din experiment sau la numărul de scoruri pe care le dă fiecare subiect, astfel că în exemplul nostru, $n_S = 2$.

$$SS_{SUBIECTI} = \Sigma \frac{T_S^2}{n_S} - \frac{G^2}{n} = \frac{1067}{2} - 517{,}56 = 15{,}94$$

În fine, SS_{EROARE} se calculează cu ajutorul următoarei formule:

Formula 19. $SS_{EROARE} = SS_{TOTAL} - SS_A - SS_{SUBIECTI}$

$$SS_{EROARE} = 35{,}44 - 10{,}57 - 15{,}94 = 8{,}93$$

Conform ipotezei de nul, atractivitatea fizică nu influențează judecata asupra competenței profesionale. Forma generală a unui tabel ANOVA rezumativ pentru eşantioane dependente este următoarea:

Sursa de variaţie	Sume de pătrate	Grade de libertate	Medii ale sumelor	F (obţinut)
A	SS_A	$k-1$	MS_A	MS_A/MS_{EROARE}
SUBIECŢI	$SS_{SUBIECŢI}$	$s-1$	-	
EROARE	SS_{EROARE}	$(k-1)(s-1)$	MS_{EROARE}	
TOTAL	SS_{TOTAL}	$N-1$		

Procedurile de calcul pentru mediile sumelor de pătrate şi pentru F (obţinut) sunt similare sau aceleaşi cu cele deja cunoscute, exceptând faptul că în formulele respective apare s, care se referă la numărul de subiecţi din experiment. De notat că, în acest caz, media sumei de pătrate şi F (obţinut) pentru $SS_{SUBIECŢI}$ nu se calculează. În mod obişnuit, nu este necesar să cunoaştem dacă există diferenţe semnificative între subiecţi. Aflarea cantităţii corespunzătoare sursei de varianţă $SS_{SUBIECŢI}$ contribuie, însă, la reducerea sursei de variaţie SS_{EROARE} (formula 19). În exemplul nostru, avem următorul tabel:

Tabelul 9.6. ANOVA rezumativ, eşantioane dependente

Sursa de variaţie	Sume de pătrate	Grade de libertate	Medii ale sumelor	F (obţinut)
A	10,57	1	10,57	8,26
SUBIECŢI	15,94	7	–	
EROARE	8,93	7	1,28	
TOTAL	35,44	15		

Lăsăm ca exerciţiu pentru cititor formularea în termenii modelului în patru paşi a testului ANOVA aplicat aici, în principal a deciziei pentru $\alpha = 0,05$, precum şi a enunţului de probabilitate asociat concluziei[8].

[8] Vezi exerciţiul 9.1.

GLOSAR

Analiza de varianță (ANOVA): procedură de testare a ipotezei conform căreia mediile aritmetice ale k populații ($k \geq 2$) sunt egale. Testul ANOVA poate fi considerat drept o extensie a testului privind diferența dintre două medii aritmetice.

Curbe *F*: grafic al distribuției *F*.

Distribuția *F*: distribuția de eșantionare în testul ANOVA.

BCU IAȘI/CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

10. TESTE NONPARAMETRICE

Toate testele statistice prezentate până acum se bazează pe anumite supoziții privind parametrii populațiilor din care sunt selectate eşantioanele, şi anume supoziția de normalitate şi de omogenitate a abaterilor standard ale populațiilor respective. **Testele nonparametrice** sunt teste de semnificație care nu necesită supoziții particulare despre forma distribuției populațiilor de referință, astfel încât pot fi aplicate în special atunci când se lucrează cu eşantioane mici. În al doilea rând, testele nonparametrice sunt cu deosebire utile în psihologie, întrucât pot fi aplicate pentru variabile măsurate la nivel nominal sau ordinal.

10.1. TESTUL CHI-PĂTRAT (χ^2)

Testul chi-pătrat (χ^2) este aplicabil atunci când nivelul de măsură este nominal, datele fiind frecvențe – numărul de cazuri care fac parte din categoriile variabilelor (variabilei) considerate. Esența acestui test constă în compararea **frecvențelor observate** – frecvențele efective obținute empiric de către cercetător – cu **frecvențele teoretice** sau **aşteptate** – frecvențele calculate sub presupunerea că ipoteza de nul este adevărată. Testul examinează măsura în care frecvențele observate sunt sau nu semnificativ diferite de frecvențele care sunt aşteptate dacă ipoteza de nul este adevărată. Distincția dintre frecvențele observate şi cele aşteptate poate fi înțeleasă cu ajutorul următorului exemplu intuitiv. Să presupunem că avem un zar şi dorim să verificăm ipoteza că este nemăsluit. Pentru aceasta, aruncăm zarul de 300 de ori şi observăm frecvența de apariție a fiecărei fețe. Dacă ipoteza menționată este adevărată, ne-am aştepta ca fiecare față să apară de aproximativ 50 de ori. Acum, să presupunem că observăm următoarele frecvențe de apariție:

Fața	Număr de apariții
1	42
2	55
3	38
4	57
5	64
6	44

Comparând frecvențele observate cu cele teoretice, suntem îndreptățiți să spunem că zarul respectiv este măsluit sau diferențele pot fi puse pe seama fluctuațiilor întâmplătoare?

Testul chi-pătrat poate fi folosit pentru verificarea independenței a două variabile sau pentru verificarea concordanței dintre frecvențele observate și frecvențele așteptate ale unei singure variabile. Corespunzător, se vorbește despre **testul chi-pătrat pentru independență** și despre **testul chi-pătrat pentru concordanță.**

10.1.1. Testul chi-pătrat pentru independență

Două variabile sunt **independente** dacă, pentru toate cazurile din eșantionul considerat, clasificarea unui caz într-o categorie a unei variabile nu are nici un efect asupra probabilității ca acel caz să fie clasificat în oricare dintre categoriile celeilalte variabile. De pildă, să presupunem că variabilele de interes sunt sexul și dominanța funcțional-operativă a mâinilor pentru un eșantion de 50 de bărbați și 50 de femei. Aceste două variabile sunt independente, în condițiile în care clasificarea subiecților în categoriile unei variabile (*masculin – feminin*) nu are nici un efect asupra clasificării cazurilor în categoriile celeilalte variabile (*dreapta, stânga, ambidextru*). Acum, să presupunem că am efectuat un astfel de studiu și am obținut următoarele date:

Tabelul 10.1. Sexul și dominanța funcțional-operativă a mâinilor

Dominanța	Sexul		TOTAL
	Masculin	Feminin	
Dreapta	15	35	50
Stânga	30	10	40
Ambidextru	5	5	10
TOTAL	50	50	100

Un astfel de tabel rectangular, în care cazurile dintr-un eșantion sunt clasificate concomitent după categoriile a două variabile, se numește **tabel al contingențelor.** Denumirile categoriilor unei variabile sunt folosite drept titluri de coloane, iar denumirile categoriilor celeilalte variabile sunt folosite drept titluri de rânduri. În corpul tabelului, intersecția unui rând cu o coloană se numește **celulă.** Celulele indică numărul de cazuri clasificate concomitent în câte două categorii ale celor două variabile. Subtotalurile pentru fiecare coloană și rând se numesc **marginale.** Marginalele indică distribuțiile de frecvențe pentru fiecare categorie a variabilei respective sau,

altfel spus, **distribuţiile univariate** de frecvenţe ale fiecărei variabile. La intersecţia marginalelor de pe linii şi coloane se prezintă numărul total de cazuri din eşantion (n).

În cazul testului chi-pătrat pentru independenţă, ipoteza de nul enunţă că variabilele sunt independente. În exemplul nostru, ipoteza de nul este că sexul nu are nici o influenţă asupra dominanţei funcţional-operative a mâinilor. Sub supoziţia că ipoteza de nul este adevărată, se calculează frecvenţele din celule la care ne-am aştepta, dacă ar interveni doar întâmplarea. Aceste frecvenţe aşteptate sunt apoi comparate, celulă cu celulă, cu frecvenţele observate în tabel. Dacă ipoteza de nul este adevărată, atunci diferenţele dintre frecvenţele aşteptate şi cele observate vor fi mici. Dacă, însă, ipoteza de nul este falsă, atunci aceste frecvenţe vor fi relativ mari. Cu cât sunt mai mari diferenţele dintre frecvenţele aşteptate şi cele observate, cu atât este mai puţin probabil ca variabilele să fie în fapt independente, deci este cu atât mai probabil că vom putea respinge ipoteza de nul.

Pentru a afla **frecvenţa aşteptată** pentru fiecare celulă a tabelului, folosim următoarea formulă:

Formula 10.1. $f_a = \dfrac{f_r f_c}{n}$

în care f_r = marginalul rândului pe care este situată celula respectivă;

f_c = marginalul coloanei pe care este situată celula respectivă;

n = numărul total de cazuri din eşantion;

În cazul tabelului 10.1, frecvenţele aşteptate sunt următoarele:

	Masculin	Feminin
Dreapta	$\dfrac{50 \cdot 50}{100} = 25$	$\dfrac{50 \cdot 50}{100} = 25$
Stânga	$\dfrac{40 \cdot 50}{100} = 20$	$\dfrac{40 \cdot 50}{100} = 20$
Ambidextru	$\dfrac{10 \cdot 50}{100} = 5$	$\dfrac{10 \cdot 50}{100} = 5$

Calcularea statisticii testului chi-pătrat pentru independenţă se face cu ajutorul următoarei formule, care dă valoarea pentru χ^2 (obţinut):

Formula 10.2. $\chi^2 = \Sigma \frac{(f_o - f_a)^2}{f_a}$

în care f_o = frecvențele observate în celulele tabelului;

f_a = frecvențele așteptate.

Astfel, odată calculate frecvențele așteptate, formula 10.2 ne conduce la scăderea frecvenței așteptate din **frecvența observată** pentru fiecare celulă, ridicarea la pătrat a acestei diferențe, împărțirea rezultatului la frecvența așteptată pentru acea celulă și apoi la însumarea valorilor rezultate ale tuturor celulelor. Calculele pentru exemplul nostru sunt ilustrate în tabelul 10.2.

Tabelul 10.2. Calculul χ^2 pentru datele din tabelul 10.1.

f_o	f_a	$f_o - f_a$	$(f_o - f_a)^2$	$(f_o - f_a)^2 / f_a$
15	25	−10	100	4
30	20	10	100	5
5	5	0	0	0
35	25	10	100	4
10	20	−10	100	5
5	5	0	0	0
100	100	0	–	$18 = \chi^2$

De notat că suma frecvențelor observate este egală cu suma frecvențelor așteptate și că suma diferențelor $f_o - f_a$ este egală cu 0. Aceste relații pot fi folosite la verificarea calculelor pentru χ^2 (obținut).

Distribuția de eșantionare folosită în acest test este distribuția χ^2. Ca și în cazul distribuției *t*-Student, este vorba despre o familie de distribuții χ^2, fiecare fiind o funcție de un anumit număr de grade de libertate. În cazul testului chi-pătrat pentru independență, numărul de grade de libertate se calculează cu ajutorul următoarei formule:

Formula 10.3. $gl = (r - 1)(c - 1)$

în care r = numărul de rânduri din tabelul contingențelor;

c = numărul de coloane din tabelul contingențelor.

Un tabel cu trei rânduri şi două coloane (un tabel 3 × 2) are (3 – 1)(2 – 1) = 2 grade de libertate[1]. Spre deosebire de distribuţia *t*-Student, care este simetrică, distribuţia χ^2 prezintă, ca şi distribuţia *F*, o asimetrie pozitivă, după cum se ilustrează în figura 10.1.

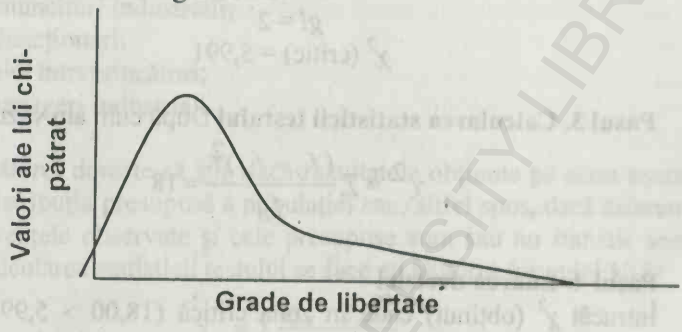


Figura 10.1. Un exemplu de curbă χ^2

Valorile pentru χ^2 (critic) marchează începuturile zonelor critice şi sunt date în **tabelul valorilor critice ale distribuţiei χ^2** (Anexa E). Acest tabel este similar cu tabelul distribuţiei *t*–Student, având nivelurile α dispuse pe primul rând şi gradele de libertate pe prima coloană din stânga. Regula de decizie este

se respinge H_0, dacă χ^2 (obţinut) > χ^2 (critic).

Întrucât în exemplu nostru $gl = 2$, dacă stabilim $\alpha = 0{,}05$, scorul χ^2 (critic) este 5,991. Deoarece χ^2 (obţinut) cade în zona critică (18,00 > 5,991), se poate respinge ipoteza de nul şi se poate conchide că variabilele respective nu sunt independente: sexul influenţează dominanţa funcţional-operativă a mâinilor.

În termenii modelului în patru paşi, testul decurge după cum urmează:

Pasul 1. Enunţarea ipotezelor

H_0: Variabilele *sex* şi *dominanţa funcţional-operativă a mâinilor* sunt independente.

H_a: Variabilele *sex* şi *dominanţa funcţional-operativă a mâinilor* sunt dependente.

---

[1] Un tabel 3 × 2 are două grade de libertate deoarece, odată ce frecvenţele din două celule au fost determinate, frecvenţele din celelalte celule sunt fixate, i.e. nu mai sunt libere să varieze.

Pasul 2. Selectarea distribuției de eșantionare și stabilirea zonei critice

Distribuția de eșantionare = Distribuția χ^2

$\alpha = 0,05$

$gl = 2$

χ^2 (critic) = 5,991

Pasul 3. Calcularea statisticii testului După cum am văzut,

$$\chi^2 = \Sigma \frac{(f_o - f_a)^2}{f_a} = 18$$

Pasul 4. Luarea deciziei

Întrucât χ^2 (obținut) cade în zona critică (18,00 > 5,991), se poate respinge ipoteza de nul și se poate conchide că variabilele respective nu sunt independente: sexul influențează dominanța funcțional-operativă a mâinilor (la un nivel de încredere de 95%).

10.1.2. Testul chi-pătrat pentru concordanță

Testul chi-pătrat poate fi folosit și pentru verificarea concordanței dintre frecvențele observate și frecvențele așteptate (teoretice) ale unei singure variabile. Astfel, dacă χ^2 (obținut) > χ^2 (critic) pentru numărul corespunzător de grade de libertate și un nivel α dat, atunci diferențele dintre frecvențele observate și cele așteptate pot fi atribuite întâmplării, concordanța dintre cele două tipuri de frecvențe fiind apreciată drept bună. În caz contrar, diferențele dintre frecvențele observate și cele așteptate pot fi considerate prea mari pentru a putea fi atribuite întâmplării sau, altfel spus, aceste diferențe sunt statistic semnificative.

Pentru ilustrare, să presupunem că un cercetător opinează că distribuția populației după ocupație într-o anumită zonă geografică este aproximativ următoarea:

– 20% țărani;
– 30% muncitori industriali;
– 30% funcționari;
– 15% mici întreprinzători;
– 5% manageri industriali.

Cercetătorul alcătuieşte un eşantion aleatoriu de 864 de persoane ocupate din zona respectivă pe care le clasifică în categoriile menţionate. Frecvenţele observate pentru aceste categorii sunt următoarele:

- 145 ţărani;
- 310 muncitori industriali;
- 305 funcţionari;
- 78 mici întreprinzători;
- 26 manageri industriali.

Cercetătorul doreşte să ştie dacă rezultatele obţinute pe acest eşantion confirmă distribuţia presupusă a populaţiei sau, altfel spus, dacă diferenţele dintre frecvenţele observate şi cele presupuse sunt sau nu statistic semnificative. Calcularea statisticii testului se face cu ajutorul formulei 10.2:

$$\chi^2 = \Sigma \frac{(f_o - f_a)^2}{f_a}$$

Pentru a afla **frecvenţa aşteptată** pentru fiecare categorie a variabilei considerate, folosim următoarea formulă:

Formula 10.4. $f_a = np$

în care n = numărul total de cazuri din eşantion;

p = proporţia presupusă de cazuri din categoria respectivă.

De pildă, pentru ţărani, $f_a = np_1 = 0{,}20 \cdot 864 = 172{,}80$.

Calculele pentru exemplul nostru sunt ilustrate în tabelul 10.3.

Tabelul 10.3. Calculul χ^2 pentru datele privind ocupaţia

Ocupaţia	f_o	f_a	$f_o - f_a$	$(f_o - f_a)^2$	$(f_o - f_a)^2 / f_a$	R
Ţăran	145	172,80	–27,80	772,84	4,47	–2,12
Muncitor industrial	310	259,20	50,80	2580,64	9,96	3,16
Funcţionar	305	259,20	45,80	2097,64	8,09	2,84
Mic întreprinzător	78	129,60	–51,60	2662,56	20,54	–4,53
Manager industrial	26	43,20	–17,20	295,84	6,85	–2,63
TOTAL	864,00	864,00	0	–	$49{,}91 = \chi^2$	

De notat că frecvențele așteptate sunt exact acele frecvențe pe care le-am întâlni dacă proporțiile cazurilor din eșantion ar fi aceleași cu proporțiile cazurilor pentru populație.

În cazul testului chi-pătrat pentru concordanță, numărul de grade de libertate se calculează cu ajutorul următoarei formule:

Formula 10.5. $gl = k - 1$

în care k = numărul de categorii ale variabilei de interes.

Întrucât în exemplul nostru sunt considerate cinci categorii ale variabilei *ocupație*, avem patru grade de libertate[2]. Pentru $\alpha = 0,05$ și $gl = 4$, χ^2 (critic) = 9,488.

Testul formal este următorul:

Pasul 1. Enunțarea ipotezelor

H_0: Nu există nici o diferență între proporțiile din eșantion și cele pentru populație.

H_a: Proporțiile din eșantion diferă de cele pentru populație.

Pasul 2. Selectarea distribuției de eșantionare și stabilirea zonei critice

Distribuția de eșantionare = Distribuția χ^2

$\alpha = 0,05$

$gl = 4$

χ^2 (critic) = 9,488

Pasul 3. Calcularea statisticii testului. După cum am văzut,

$$\chi^2 = \Sigma \frac{(f_o - f_a)^2}{f_a} = 49,91$$

Pasul 4. Luarea deciziei

Întrucât χ^2 (obținut) cade în zona critică (49,91 > 9,448), se poate respinge ipoteza de nul. Diferențele dintre eșantion și populație sunt prea mari pentru a putea fi atribuite întâmplării (la un nivel de încredere de 95%).

De notat că, deși valoarea pentru χ^2 (obținut) este statistic semnificativă în acest exemplu, această valoare este calculată ținând cont de toate categoriile, astfel că nu putem spune care categorie are cea mai mare contribuție la semnificația statistică. Atunci când χ^2 (obținut) > χ^2 (critic),

[2] Aceasta înseamnă că, odată ce frecvențele a oricare patru categorii sunt determinate, frecvența categoriei rămase este fixată.

pentru a afla care categorie are cea mai mare contribuție la semnificația statistică, se calculează **reziduul standard** pentru fiecare categorie cu ajutorul următoarei formule:

Formula 10.6. $R = \frac{f_o - f_a}{\sqrt{f_a}}$

Valorile reziduurilor standard pentru fiecare categorie din exemplul de mai sus se găsesc în tabelul 10.3. Atunci când valoarea absolută (modulul) reziduului standard pentru o categorie este mai mare decât 2,00, se poate conchide că acea categorie are o contribuție majoră la valoarea semnificativă a lui χ^2 (obținut). În exemplul de mai sus, toate reziduurile standard în valoare absolută sunt mai mari decât 2,00. Prin urmare, toate categoriile contribuie major la valoarea semnificativă a lui χ^2 (obținut), ceea ce înseamnă că *întreaga* distribuție din eșantion nu concordă cu distribuția presupusă de cercetător.

10.2. TESTUL McNEMAR

Testul McNemar este un test nonparametric pentru semnificația schimbării. Acest test utilizează distribuția χ^2 și este aplicabil pentru variabile de nivel nominal, în cazul a două eșantioane dependente.

Să presupunem că am alcătuit un eșantion aleatoriu de 38 de femei salariate și am solicitat în două momente diferite răspunsul la întrebarea „Credeți că organizațiile feministe vă apără interesele?" Întrebarea a fost pusă înainte și după ce femeile din eșantion au citit o serie de documente despre astfel de organizații. Datele obținute sunt prezentate în următorul tabel 2 × 2:

Tabelul 10.4. Date pentru calculul χ^2 în cazul a două eșantioane dependente pentru opinia despre organizațiile feministe

		Înainte de lectura documentelor: Da	Înainte de lectura documentelor: Nu
După lectura documentelor	Nu	14 (*A*)	6 (*B*)
	Da	16 (*C*)	2 (*D*)

38

Este important să remarcăm ordinea intrării datelor în acest tabel. Astfel, celulele *A* și *D* trebuie să fie cele care indică schimbarea răspunsurilor de la un moment la altul – de la *Da* la *Nu* (*A*) și, respectiv, de la *Nu* la *Da* (*D*) –, iar celulele *B* și *C* trebuie să fie cele care indică absența schimbării răspunsurilor de la un moment la altul. Fiind vorba despre tabele 2×2, în cazul testului McNemar, $gl = 1$.

În acest test ne interesează doar celulele care reflectă schimbarea opiniei despre apărarea intereselor femeilor salariate de către organizațiile feministe, i.e. celulele *A* și *D*. Ipoteza de nul pentru testul McNemar enunță că, în cazul populației de referință, numărul de schimbări într-o direcție este egal cu numărul de schimbări în cealaltă direcție. Aceasta înseamnă că, presupunând că ipoteza de nul este adevărată, frecvența așteptată în celula *A* va fi egală cu frecvența așteptată în celula *D*. Ipoteza alternativă enunță că numărul de schimbări într-o direcție este diferit de numărul de schimbări în cealaltă direcție.

Testul statistic este testul χ^2 și se poate folosi formula 10.2 pentru calcularea valorii lui χ^2 (obținut), dar formula va fi aplicată doar celulelor *A* și *D*. Întrucât se presupune că frecvențele așteptate din aceste două celule sunt egale, valoarea așteptată în fiecare dintre aceste două celule este egală cu $(A + D)/2$. Astfel, formula de calcul a valorii χ^2 (obținut) pentru testul McNemar se simplifică după cum urmează:

Formula 10.6. $$\chi^2 = \frac{(A-D)^2}{A+D}$$

Pentru exemplul de mai sus, testul formal decurge după cum urmează:

Pasul 1. Enunțarea ipotezelor

H_0: Există un număr egal de schimbări în ambele direcții.

H_a: Numărul de schimbări într-o direcție este semnificativ diferit față de numărul de schimbări în cealaltă direcție.

Pasul 2. Selectarea distribuției de eșantionare și stabilirea zonei critice

Distribuția de eșantionare = Distribuția χ^2

$\alpha = 0{,}05$

$gl = 1$

χ^2 (critic) = 3,841

Pasul 3. Calcularea statisticii testului

$$\chi^2 = \frac{(A-D)^2}{A+D} = \frac{(14-2)^2}{14+2} = \frac{12^2}{16} = \frac{144}{16} = 9{,}00$$

Pasul 4. Luarea deciziei

Întrucât χ^2 (obținut) cade în zona critică (9,00 > 3,841), se poate respinge ipoteza de nul. Există o diferență statistic semnificativă între numărul de schimbări într-o direcție și numărul de schimbări în cealaltă direcție (o diferență care nu poate fi pusă pe seama întâmplării). Din tabelul 10.4 rezultă că mai multe femei salariate și-au schimbat opinia de la *Da* la *Nu* decât de la *Nu* la *Da*, iar testul arată că această diferență este statistic semnificativă.

10.3. TESTUL MANN-WHITNEY *U*

Testul Mann-Whitney *U* este asemănător în multe privințe cu testele parametrice pentru diferența dintre mediile aritmetice a două eșantioane independente. În ambele cazuri, comparăm două eșantioane independente pentru a face inferențe despre diferențele dintre cele două populații de referință și comparăm rezultatul calculării testului statistic cu distribuția de eșantionare a rezultatelor tuturor eșantioanelor posibile. Pe de altă parte, acest test se bazează pe ordonarea scorurilor eșantioanelor, astfel că este aplicabil la date de nivel ordinal.

Testul Mann-Whitney *U* comportă două variante, în funcție de dimensiunile eșantioanelor. Prezentăm mai întâi testul pentru eșantioane mici ($n_1 \leq 20$ și $n_2 \leq 20$).

Să presupunem că ne preocupă diferența pe sexe privind nivelul de satisfacție în raport cu serviciile sociale oferite într-un campus universitar. Pentru aceasta, selectăm aleatoriu două eșantioane de studenți, băieți și fete, cu $n_1 = 10$ și $n_2 = 10$, și administrăm o scală în care un scor înalt indică un nivel înalt de satisfacție. Scorurile obținute sunt prezentate în tabelul 10.5.

Tabelul 10.5. Scoruri ale satisfacției exprimate în raport cu serviciile sociale oferite într-un campus universitar

Eșantionul 1 (studente)			Eșantionul 2 (studenți)		
Cazul	Scorul	Rangul	Cazul	Scorul	Rangul
1	5	1	11	10	3
2	9	2	12	20	8
3	14	4	13	24	9
4	15	5	14	26	11
5	17	6	15	27	12
6	19	7	16	28	13
7	25	10	17	30	14,5
8	30	14,5	18	32	16
9	35	17	19	40	18
10	42	19	20	45	20
		$\Sigma R_1 = 85,5$			$\Sigma R_2 = 124,5$

Mai întâi, aranjăm scorurile din fiecare eșantion în ordine crescătoare (sau descrescătoare). Apoi, considerăm scorurile combinate ale celor două eșantioane ca și cum ar fi vorba despre un singur eșantion și acordăm **ranguri** scorurilor combinate, de la cel mai mic la cel mai mare scor. Astfel, acordăm rangul 1 celui mai mic scor (5), rangul 2 scorului imediat următor (9) ș.a.m.d. până la cel mai mare scor (45). Dacă întâlnim două sau mai multe scoruri identice (două sau mai multe cazuri cu același scor), procedăm după cum urmează:

- considerăm rangurile pe care aceste scoruri le-ar fi avut dacă ar fi fost diferite și imediat succesive;
- calculăm media aritmetică a acestor ranguri;
- atribuim fiecărui scor rangul mediu astfel obținut.

În exemplul nostru, cazurile 8 și 17 au același scor, 30. Scorului cazului 8 i-am fi atribuit rangul 14, iar scorului cazului 17 i-am fi atribuit scorul 15. Prin urmare, atribuim ambelor scoruri rangul 14,5 ((14 + 15)/2), iar scorului imediat următor în ordine crescătoare (32) îi atribuim rangul 16 (rangul pe care l-ar fi avut acest scor, dacă cele două scoruri 30 ar fi fost diferite). După această operație, calculăm suma rangurilor pentru fiecare eșantion. Intuitiv vorbind, dacă cele două eșantioane reprezintă populații care nu diferă semnificativ între ele sub aspectul variabilei măsurate, atunci cele două sume sunt apropiate ca valoare. Dacă, însă, cele două eșantioane

reprezintă populații care diferă semnificativ între ele sub aspectul variabilei măsurate, atunci cele două sume sunt mult diferite.

Calcularea statisticii testului presupune mai întâi calcularea a două mărimi statistice, U_1 și U_2, cu ajutorul următoarelor formule:

Formula 10.7. $U_1 = n_1 n_2 + \frac{n_1(n_1+1)}{2} - \Sigma R_1$

Formula 10.8. $U_1 = n_1 n_2 + \frac{n_2(n_2+1)}{2} - \Sigma R_2$

În aceste formule, n_1 și n_2 sunt, respectiv, dimensiunile celor două eșantioane, iar ΣR_1 și ΣR_2 sunt, respectiv, sumele rangurilor pentru cele două eșantioane.

Odată calculate cele două mărimi, U_1 și U_2, se ia drept valoare pentru U (obținut) *cea mai mică* dintre valorile U_1, U_2: U (obținut) = min (U_1, U_2).

Pentru a stabili valoarea critică din distribuția de eșantionare a valorilor U, folosim **tabelul valorilor critice pentru testul Mann-Whitney** U (anexa F). Pe prima linie și pe prima coloană din stânga ale acestui tabel sunt trecute dimensiunile a două eșantioane, de la 1 la 20. Pe ce-a de-a doua coloană din stânga, pentru fiecare dimensiune de eșantion, apar nivelurile α pentru un test unilateral (direcțional). În cazul unui test bilateral (nondirecțional), nivelul α dat se localizează înmulțind cu doi valoarea aflată pe cea de-a doua coloană din stânga. Valoarea critică, U (critic), se află la intersecția liniei corespunzătoare dimensiunii unui eșantion la nivelul α ales cu coloana corespunzătoare dimensiunii celuilalt eșantion. În exemplul nostru, având $n_1 = 10$ și $n_2 = 10$, pentru $\alpha = 0{,}05$ (test nondirecțional), U (critic) = 23.

Ipoteza de nul este, ca întotdeauna, un enunț de tipul „nici o diferență", dar este formulată în termeni mai generali decât în cazul testelor parametrice: nu există nici o diferență în privința scorurilor populațiilor respective sub aspectul variabilei de interes. În exemplul nostru, ipoteza de nul enunță că nu există nici o diferență între studente și studenți sub aspectul satisfacției exprimate în raport cu serviciile sociale oferite în campus. De regulă, ipoteza alternativă enunță că populațiile din care au fost selectate eșantioanele sunt diferite sub aspectul variabilei de interes. Această formă a ipotezei de nul conduce la un test nondirecțional. Desigur, putem apela la un test direcțional, atunci când sensul diferenței poate fi prezis, i.e. atunci când putem prezice că scorurile unei populații sunt mai mari sau mai mici decât scorurile celeilalte populații. Într-un test nondirecțional, regula de decizie este următoarea:

se respinge H_0, dacă U (obținut) $\leq$ U (critic).

De remarcat că ipoteza de nul se respinge dacă valoarea obținută este *mai mică* decât cea critică. Această regulă diferă de regulile de decizie din cele mai multe teste de semnificație, în care ipoteza de nul este respinsă dacă valoarea obținută este *mai mare* decât cea critică.

Dacă se poate prezice că scorurile populației 1 sunt mai mari decât cele ale populației 2, regula de decizie este

se respinge H_0, dacă U_1 U (critic),

iar dacă se poate prezice că scorurile populației 1 sunt mai mici decât cele ale populației 2, regula de decizie este

se respinge H_0, dacă U_2 U (critic).

Testul formal decurge după cum urmează:

Pasul 1. Enunțarea ipotezelor

H_0: Satisfacția$_1$ = Satisfacția$_2$

H_a: Satisfacția$_1$ ≠ Satisfacția$_2$

Pasul 2. Selectarea distribuției de eșantionare și stabilirea zonei critice

Distribuția de eșantionare = Distribuția U

$\alpha = 0{,}05$ (test nedirecțional)

U (critic) = 23

Pasul 3. Calcularea statisticii testului

$$U_1 = n_1 n_2 + \frac{n_1(n_1+1)}{2} - \Sigma R_1 = (10 \cdot 10) + \frac{10 \cdot 11}{2} - 85{,}5 = 100 + 55 - 85{,}5 = 69{,}5$$

$$U_1 = n_1 n_2 + \frac{n_2(n_2+1)}{2} - \Sigma R_2 = (10 \cdot 10) + \frac{10 \cdot 11}{2} - 124{,}5 =$$

$$= 100 + 55 - 124{,}5 = 30{,}5$$

$$U = \min(U_1, U_2) = 30{,}5$$

Pasul 4. Luarea deciziei

Întrucât U (obținut) > U (critic) (30,5 > 23), nu putem respinge ipoteza de nul. Studentele nu diferă semnificativ de studenți sub aspectul nivelului de satisfacție în raport cu serviciile sociale oferite în campus (la un nivel de încredere de 95%).

Atunci când $n_1 > 20$ şi $n_2 > 20$, distribuţia de eşantionare pentru U se apropie de distribuţia normală, astfel încât putem folosi tabelul scorurilor Z pentru a stabili zona critică. Luând drept cadru modelul în patru paşi, în pasul 2, distribuţia de eşantionare este distribuţia Z, zona critică fiind cea marcată de Z (critic), în funcţie de nivelul α ales şi de tipul de test (unilateral sau bilateral). Formula pentru Z (obţinut) este următoarea:

Formula 10.9. $$Z = \frac{U - \mu_U}{\sigma_U}$$

în care μ_U = media aritmetică a distribuţiei de eşantionare a valorilor U pentru toate eşantioanele posibile;

σ_U = abaterea standard a distribuţiei de eşantionare a valorilor U pentru toate eşantioanele posibile.

Valorile pentru μ_U şi σ_U se calculează cu ajutorul următoarelor formule:

Formula 10.10. $$\mu_U = \frac{n_1 n_2}{2}$$

Formula 10.11. $$\sigma_U = \sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 + 1)}{12}}$$

Prin urmare, în pasul 3 lucrăm cu următoarea formulă:

Formula 10.12. $$Z = \frac{U - \frac{n_1 n_2}{2}}{\sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 + 1)}{12}}}$$

În fine, în pasul 4 se utilizează procedura de decizie cunoscută pentru testul Z.

10.4. TESTUL MEDIANEI

Testul medianei este un test nonparametric pentru egalitatea a două mediane. Acest test utilizează distribuţia χ^2 şi este aplicabil în cazul a două eşantioane independente, pentru variabile măsurate la nivel ordinal.

Să presupunem că ne interesează atitudinea femeilor salariate şi a celor casnice faţă de mişcările feministe. Alcătuim un eşantion de 10 femei salariate şi un eşantion de 10 femei casnice şi administrăm un chestionar adecvat. Scorurile obţinute sunt prezentate în tabelul 10.6.

Tabelul 10.6. Atitudinea față de mișcările feministe a femeilor salariate și a casnicelor

Eșantionul 1 (salariate)			Eșantionul 2 (casnice)		
Cazul	Scorul	Rangul	Cazul	Scorul	Rangul
1	19	3	11	16	1
2	22	5	12	18	2
3	28	8	13	21	4
4	32	11	14	26	6
5	34	13	15	27	7
6	37	14	16	29	9
7	40	17	17	31	10
8	42	18	18	33	12
9	43	19	19	38	15
10	46	20	20	39	16

Mai întâi, aranjăm scorurile din fiecare eșantion în ordine crescătoare (sau descrescătoare). Apoi, considerăm scorurile combinate ale celor două eșantioane ca și cum ar fi vorba despre un singur eșantion și aflăm **mediana** scorurilor combinate. Pentru a înlesni aflarea medianei scorurilor combinate este recomandabil să acordăm ranguri scorurilor. Întrucât avem un număr par de cazuri (20), mediana va fi media aritmetică a scorurilor celor două cazuri de mijloc, 31 și 32:

$$\tilde{X} = \frac{31+32}{2} = 31{,}5$$

Cu ajutorul unui tabel 2 × 2, prezentăm pentru fiecare eșantion numărul de scoruri aflate deasupra și sub mediana scorurilor combinate:

	Eșantion 1	Eșantion 2	
Deasupra medianei	7 *A*	3 B	10
Sub mediană	3 *C*	7 *D*	10
	10	10	20

Fiind un tabel 2 × 2, numărul de grade de libertate este egal cu 1.

Ipoteza de nul pentru testul medianei enunță că populațiile din care au fost selectate cele două eşantioane au aceeaşi mediană ($\tilde{\mu}_1 = \tilde{\mu}_2$), iar ipoteza alternativă enunță că medianele celor două populații sunt diferite ($\tilde{\mu}_1 \neq \tilde{\mu}_2$).

În general, formula de calcul a valorii χ^2 (obținut) pentru testul medianei este formula 10.2. Pentru un tabel 2 × 2, notând celulele ca mai sus, formula de calcul poate fi simplificată, după cum urmează:

Formula 10.13. $$\chi^2 = \frac{n(AD - BC)^2}{(A+B)(C+D)(A+C)(B+D)}$$

În termenii modelului în patru paşi, testul decurge după cum urmează:

Pasul 1. Enunțarea ipotezelor

H_0: $\tilde{\mu}_1 = \tilde{\mu}_2$

H_a: $\tilde{\mu}_1 \neq \tilde{\mu}_2$

Pasul 2. Selectarea distribuției de eşantionare şi stabilirea zonei critice

Distribuția de eşantionare = Distribuția χ^2

$\alpha = 0{,}05$

$gl = 1$

χ^2 (critic) = 3,841

Pasul 3. Calcularea statisticii testului

$$\chi^2 = \frac{n(AD - BC)^2}{(A+B)(C+D)(A+C)(B+D)} = \frac{20(7 \cdot 7 - 3 \cdot 3)^2}{10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10} = 3{,}20$$

Pasul 4. Luarea deciziei

Întrucât χ^2 (obținut) nu cade în zona critică (3,20 < 3,841), nu se poate respinge ipoteza de nul, ceea ce înseamnă că nu există nici o diferență statistic semnificativă între femeile salariate şi cele casnice în privința atitudinii față de mişcările feministe (la un nivel de încredere de 95%).

10.5. TESTUL ITERAȚIILOR

Testul iterațiilor este similar ca logică şi formă cu testul Testul Mann-Whitney *U*. Ipoteza de nul enunță că nu există o diferență semnificativă între populațiile de referință sub aspectul variabilei de interes. Pentru a aplica acest test, se combină scorurile celor două eşantioane, după care

aceste scoruri se ordonează crescător (sau descrescător) ca şi cum ar fi vorba despre un singur eşantion. Dacă ipoteza de nul este adevărată, atunci scorurile vor fi foarte amestecate şi vom avea multe iteraţii. O **iteraţie** (repetare) este orice succesiune de R elemente de acelaşi fel, cu $R \geq 1$. Dacă ipoteza de nul este falsă, populaţiile fiind diferite sub aspectul variabilei de interes, atunci vor fi foarte puţine iteraţii.

Pentru a ilustra noţiunea de iteraţie, să considerăm datele din tabelul 10.5 şi să folosim **F** pentru studente şi **B** pentru studenţi. Obţinem următoarele iteraţii:

FF	B	FFFF	BB	F	BBBB	F	B	F	B	F	B
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

Cele două litere F din extrema stângă reprezintă două studente care au cele mai mici scoruri din ambele eşantioane; următoarea literă, B, reprezintă un student cu scorul următor în ordine crescătoare ş.a.m.d. De notat că nici o iteraţie alcătuită din elemente de un anumit tip nu se învecinează cu o iteraţie alcătuită din elemente de acelaşi tip. Dacă, de pildă, am considera primul element al iteraţiei 3 drept o iteraţie distinctă, atunci aceasta s-ar învecina la dreapta cu o iteraţie alcătuită din elemente de acelaşi tip, F.

Diferenţa dintre eşantioane, deci dintre populaţii, este cu atât mai semnificativă cu cât numărul de iteraţii este mai mic. Cel mai mic număr de iteraţii posibil este, desigur, 2. În exemplul de mai sus, dacă toţi studenţii ar exprima o satisfacţie mai mare decât studentele în raport cu serviciile sociale din campus, am fi obţinut următoarele două iteraţii:

BBBBBBBBBB	FFFFFFFFFF
1	2

Evident, numărul maxim posibil de iteraţii este egal cu numărul de cazuri din cele două eşantioane.

Este important de reţinut că, în aplicarea acestui test, cazurile care nu fac parte din acelaşi eşantion şi au scoruri identice pot crea probleme serioase, deoarece numărul de iteraţii poate fi mult afectat de felul în care sunt aranjate cazurile cu scoruri identice. Dacă întâlnim multe cazuri cu scoruri identice în eşantioane diferite este recomandabil să folosim alt test de semnificaţie.

Distribuţia de eşantionare pentru iteraţii aproximează normalitatea. Media aritmetică a acestei distribuţii (μ_R) şi abaterea sa standard (σ_R) se calculează cu ajutorul următoarelor formule:

Formula 10.14. $\mu_R = \frac{2n_1n_2}{n_1 + n_2} + 1$

Formula 10.15. $\sigma_R = \sqrt{\frac{2n_1n_2(2n_1n_2 - n_1 - n_2)}{(n_1 + n_2)^2(n_1 + n_2 - 1)}}$

Statistica testului iteraţiilor, Z (obţinut), se calculează cu următoarea formulă:

Formula 10.16. $Z = \frac{R - \mu_R}{\sigma_R}$

în care R = numărul de iteraţii.

Pentru a ilustra aplicarea acestui test, să presupunem că două eşantioane aleatorii alcătuite, respectiv, din bărbaţi şi femei au fost chestionate cu privire la atitudinea faţă de politică şi politicieni. Scorurile sunt prezentate în următorul tabel:

Tabelul 10.7. Atitudinea faţă de politică şi politicieni pentru două eşantioane de bărbaţi şi, respectiv, femei

Bărbaţi		Femei	
Cazul	Scorul	Cazul	Scorul
1	1	21	0
2	1	22	0
3	2	23	4
4	2	24	4
5	3	25	6
6	5	26	6
7	5	27	8
8	7	28	12
9	9	29	12
10	10	30	13
Bărbaţi		Femei	
Cazul	Scorul	Cazul	Scorul
11	10	31	14
12	15	32	16
13	17	33	16
14	17	34	21
15	18	35	21
16	19	36	21

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

17	20	37	25
18	22	38	26
19	22	39	27
20	23	40	27

Să observăm că aici nu există scoruri identice în eşantioane diferite (scorurile identice în acelaşi eşantion nu au nici o influenţă asupra numărului de iteraţii). Folosind tot literele B şi F, obţinem următoarele iteraţii:

FF	BBBBB	FF	BB	FF	B	F	BBB	FFFF	B	FF
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

BBBB	FFF	BBB	FFFF
12	13	14	15

În aceste date se află 15 iteraţii şi putem acum să aplicăm testul formal pentru semnificaţie.

Pasul 1. Enunţarea ipotezelor

H_0: Atitudinea$_1$ = Atitudinea$_2$

H_a: Atitudinea$_1$ ≠ Atitudinea$_2$

Pasul 2. Selectarea distribuţiei de eşantionare şi stabilirea zonei critice

Distribuţia de eşantionare = Distribuţia Z

$\alpha = 0{,}05$

Z (critic) = ±1,96

Pasul 3. Calcularea statisticii testului

$$\mu_R = \frac{2n_1n_2}{n_1+n_2}+1 = \frac{2\cdot 20\cdot 20}{20+20}+1 = 21$$

$$\sigma_R = \sqrt{\frac{2n_1n_2(2n_1n_2-n_1-n_2)}{(n_1+n_2)^2(n_1+n_2-1)}} = \sqrt{\frac{2\cdot 20\cdot 20(2\cdot 20\cdot 20-20\cdot 20}{(20+20)^2(20+20-1)}} = 3{,}12$$

$$Z = \frac{R-\mu_R}{\sigma_R} = \frac{15-21}{3{,}12} = -1{,}92$$

Pasul 4. Luarea deciziei

Întrucât Z (obținut) > $-Z$ (critic) (−1,92 > 1,96), rezultatul statisticii testului nu cade în zona critică. Prin urmare, nu putem respinge ipoteza de nul. În exemplul de mai sus, bărbații și femeile nu diferă semnificativ în privința atitudinii față de politică și politicieni.

10.6. TESTUL WILCOXON *T*

Testul Wilcoxon *T* este un test pentru semnificația diferenței dintre două eșantioane dependente, aplicabil pentru date de nivel ordinal. Astfel, testul este folosit în mod obișnuit atunci când selectarea cazurilor pentru un eșantion influențează selectarea cazurilor pentru celălalt eșantion, având ca rezultat considerarea unor perechi de cazuri, unul dintr-un eșantion, altul din celălalt eșantion, sau în situații în care aceiași subiecți sunt testați înainte și după un anumit tratament.

Ca și Testul Mann-Whitney *U*, testul Wilcoxon *T* comportă două variante, în funcție de dimensiunile eșantioanelor. Prezentăm mai întâi testul pentru eșantioane mici ($n_1 \leq 25$ și $n_2 \leq 25$).

Pentru ilustrare, să presupunem că ne interesează comportamentul agresiv al adolescenților cu dificultăți de învățare, înainte și după o serie de ședințe de consiliere. Pentru aceasta, am selectat un eșantion aleatoriu de 12 adolescenți cu dificultăți de învățare. Măsura comporta-mentului agresiv reprezintă media aprecierilor oferite de cinci consilieri. Aprecierile au fost făcute înainte și după tratament. Problema pe care ne-o punem este urmă-toarea: comportamentul agresiv al adolescenților cu dificultăți de învățare poate fi diminuat prin astfel de ședințe de consiliere? După cum se poate constata, ca și în cazul altor teste nonparametrice, ipoteza de nul și ipoteza alternativă în cazul testului Wilcoxon *T* se enunță în termeni generali.

Datele obținute sunt prezentate în tabelul 10.8, în care un scor înalt indică un comportament agresiv.

Tabelul 10.8. Scoruri ale comportamentului agresiv pentru adolescenți cu dificultăți de învățare

Cazul	Scorul Pretratament	Scorul Posttratament	Scorul Diferență	Rangul diferenței	Ranguri cu cel mai puțin frecvent semn
1	36	21	15	11	
2	23	24	–1	–1	1
3	48	36	12	10	
4	54	30	24	12	
5	40	32	8	7	
6	32	35	–3	–3	3
7	50	43	7	6	
8	44	40	4	4	
9	36	30	6	5	
10	29	27	2	2	
11	33	22	11	9	
12	45	36	9	8	
					T (obținut) = 4

Pentru calcularea statisticii testului se procedează după cum urmează:

1. Pentru fiecare caz, se calculează diferența dintre scorul pretratament și scorul posttratament; rezultatul scăderii se numește **scor diferență**.

2. Se atribuie ranguri valorilor absolute ale scorurilor diferență (modulelor scorurilor diferență), începând cu cea mai mică valoare absolută; rangurile scorurilor diferență pozitive primesc semnul +, iar rangurile scorurilor diferență negative primesc semnul –.

3. Se însumează valorile absolute ale rangurilor cu semnul care are cele mai puține apariții; rezultatul însumării reprezintă valoarea pentru T (obținut).

Ca și în cazul testului iterațiilor, în aplicarea testului Wilcoxon T, cazurile care nu fac parte din același eșantion și au scoruri identice pot crea probleme serioase. Dacă întâlnim multe cazuri cu scoruri identice în eșantioane diferite este recomandabil să folosim alt test de semnificație.

Pentru a stabili valoarea critică din distribuția de eșantionare a valorilor T, folosim **tabelul valorilor *T* critice**, elaborat de Frank Wilcoxon (anexa G). În acest tabel sunt date valorile T critice pentru diferite niveluri α și diferite dimensiuni ale eșantioanelor-perechi. În exemplul de față, cu $n = 12$, pentru $\alpha = 0{,}01$ (test unilateral), T (critic) = 10.

Ipoteza de nul enunță că nu există nici o diferență în privința comportamentului agresiv al populației de adolescenți cu dificultăți de învățare, înainte și după o serie de ședințe de consiliere. Ipoteza alternativă, în conformitate cu datele problemei, enunță că agresivitatea adolescenților cu dificultăți de învățare este diminuată după respectivele ședințe de consiliere. Această ipoteză alternativă conduce la un test unilateral stânga, în care vom respinge ipoteza de nul dacă T (obținut) < T (critic). În cazul unui test unilateral dreapta, se respinge ipoteza de nul dacă T (obținut) > T (critic). Pentru un test bilateral, se respinge ipoteza de nul dacă T (obținut) < T (critic) sau T (obținut) > T (critic).

În termenii modelului în patru pași, testul decurge după cum urmează:

Pasul 1. Enunțarea ipotezelor

H_0: Nu există nici o diferență în privința comportamentului agresiv al populației de adolescenți cu dificultăți de învățare, înainte și după o serie de ședințe de consiliere.

H_a: Comportamentul populației de adolescenți cu dificultăți de învățare este mai puțin agresiv după ședințele de consiliere.

Pasul 2. Selectarea distribuției de eșantionare și stabilirea zonei critice

Distribuția de eșantionare = Distribuția T

$\alpha = 0{,}01$ (test unilateral stânga)

T (critic) = 10

Pasul 3. Calcularea statisticii testului

După cum am văzut în tabelul 10.8, calculăm scorurile diferență și atribuim ranguri valorilor absolute ale acestor scoruri începând cu cea mai mică valoare absolută, păstrând semnele corespunzătoare. Rangurile cu semnul care are cele mai puține apariții, considerate în valoare absolută, sunt 1 și 3; prin însumarea acestor valori, găsim T (obținut) = 4.

Pasul 4. Luarea deciziei

Întrucât T (obținut) < T (critic) (4 < 10), respingem ipoteza de nul și conchidem că agresivitatea adolescenților cu dificultăți de învățare poate fi diminuată prin ședințele de consiliere.

Atunci când $n_1 > 25$ și $n_2 > 25$, distribuția de eșantionare pentru T se apropie de distribuția normală, astfel încât putem folosi tabelul scorurilor Z pentru a stabili zona critică. În pasul 3, după ce determinăm valoarea pentru

T (obținut), folosim mai întâi următoarele formule pentru determinarea mediei aritmetice a distribuției de eșantionare a valorilor T (μ_T) și, respectiv, a abaterii standard a acestei distribuții (σ_T):

Formula 10.17. $\mu_T = \frac{n(n+1)}{4}$

Formula 10.18. $\sigma_T = \sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{24}}$

În aceste formule, n reprezintă numărul de cazuri din fiecare eșantion sau, altfel spus, numărul de perechi de cazuri alcătuite din cele două eșantioane.

Z (obținut) se calculează cu următoarea formulă:

Formula 10.19. $Z = \frac{T - \mu_T}{\sigma_T}$

Procedura de decizie este cea uzuală pentru testul Z.

10.7. TESTUL KRUSKAL-WALLIS *H*

Testul Kruskal-Wallis *H* este analogul nonparametric al testului ANOVA unifactorial și este aplicabil la date de nivel ordinal.

Să presupunem că ne interesează diferențele dintre cadrele didactice din învățământul primar, cel gimnazial și cel liceal sub aspectul comportamentului autoritar față de elevi. Alcătuim eșantioane din cele trei populații cu, respectiv, $n_1 = 6$, $n_2 = 5$ și $n_3 = 6$ și administrăm subiecților o scală de autoritate. Datele obținute sunt prezentate în tabelul 10.9, în care scorurile mari indică un comportament mai autoritar.

Tabelul 10.9. Comportamentul autoritar al cadrelor didactice din învățământul primar, gimnazial și liceal

Cadre didactice din învățământul primar		Cadre didactice din învățământul gimnazial		Cadre didactice din învățământul liceal	
Scorul	Rangul	Scorul	Rangul	Scorul	Rangul
46	1	49	3	58	8
48	2	53	5	63	10
52	4	64	11	65	12
54	6	66	13	70	15
57	7	68	14	71	16
62	9			73	17
	$\Sigma R_1 = 29$		$\Sigma R_2 = 46$		$\Sigma R_3 = 78$

Considerând scorurile combinate ale celor trei eşantioane ordonate crescător, atribuim rangul 1 celui mai mic scor (46), rangul 2 scorului imediat următor (48) ş.a.m.d. până la cel mai mare scor (73). Dacă întâlnim două sau mai multe scoruri identice, procedăm în maniera indicată în cazul testului Mann-Whitney *U*. Calculăm apoi suma rangurilor pentru fiecare eşantion.

Ipoteza de nul pentru testul Kruskal-Wallis *H* este analoagă ipotezei de nul pentru testul ANOVA unifactorial, fiind însă enunţată în termeni mai generali: nu există nici o diferenţă în privinţa scorurilor celor *k* populaţii din care au fost alcătuite eşantioanele sau, altfel spus, populaţiile din care au fost alcătuite eşantioanele sunt identice sub aspectul variabilei de interes. Ipoteza alternativă enunţă că cel puţin două dintre cele *k* populaţii diferă sub aspectul variabilei de interes.

De notat că o condiţie de aplicabilitate a acestui test este ca $n_j \geq 5, j = 1,2, \ldots, k$.

Calcularea statisticii testului constă în aflarea valorii unei mărimi statistice, *H*, cu ajutorul următoarei formule:

Formula 10.20. $$H = \left[\frac{12}{N(N+1)} \cdot \sum_{j=1}^{k} \frac{(\sum R_j)^2}{n_j} \right] - 3(N+1)$$

în care N = numărul total de cazuri din cele *k* eşantioane;

ΣR_j = suma rangurilor din eşantionul $j, j = 1,2, \ldots, k$;

n_j = numărul de cazuri din eşantionul $j, j = 1,2, \ldots, k$.

Distribuţia de eşantionare în testul Kruskal-Wallis *H* este distribuţia χ^2 cu $k - 1$ grade de libertate. Ipoteza de nul este respinsă dacă valoarea lui *H* este mai mare decât valoarea critică χ^2 corespunzătoare nivelului α ales şi numărului de grade de libertate.

În termenii modelului în 4 paşi, testul pentru exemplul de mai sus decurge după cum urmează:

Pasul 1. Enunţarea ipotezelor

H_0: Nu există nici o diferenţă în privinţa comportamentului autoritar faţă de elevi al cadrelor didactice de la cele trei niveluri de învăţământ.

H_a: Cel puţin două din cele trei populaţii de cadre didactice diferă sub aspectul comportamentului autoritar faţă de elevi.

Pasul 2. Selectarea distribuției de eşantionare şi stabilirea zonei critice

Distribuția de eşantionare = Distribuția χ^2

$$\alpha = 0{,}05$$

$$gl = k - 1 = 3 - 1 = 2$$

$$\chi^2 \text{ (critic)} = 5{,}991$$

Pasul 3. Calcularea statisticii testului

$$H = \left[\frac{12}{N(N+1)} \cdot \sum_{j=1}^{k} \frac{\left(\sum R_j\right)^2}{n_j} \right] - 3(N+1) =$$

$$= \left[\frac{12}{17(17+1)} \cdot \left(\frac{29^2}{6} + \frac{46^2}{5} + \frac{78^2}{6} \right) \right] - 3(17+1) = 7{,}86$$

Pasul 4. Luarea deciziei

Întrucât H (7,86) > χ^2 (critic) (5,991), putem respinge ipoteza de nul. Examinarea datelor indică faptul că profesorii de liceu sunt mai autoritari decât cei din învățământul gimnazial şi primar şi profesorii din învățământul gimnazial sunt mai autoritari decât cei din învățământul primar, iar testul arată că aceste diferențe sunt statistic semnificative.

BCU IASI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

GLOSAR

Celulă: intersecția unui rând cu o coloană într-un tabel al contingențelor. Celulele indică numărul de cazuri clasificate concomitent în câte două categorii ale celor două variabile.

Iterație: orice succesiune de R elemente de același fel, cu $R \geq 1$.

Marginal: subtotal pentru o coloană și un rând într-un tabel al contingențelor. Marginalele indică distribuțiile de frecvențe pentru fiecare categorie a variabilei respective sau, altfel spus, **distribuțiile univariate** de frecvențe ale fiecărei variabile.

Tabel al contingențelor: tabel rectangular în care cazurile dintr-un eșantion sunt clasificate concomitent după categoriile a două variabile. Denumirile categoriilor unei variabile sunt folosite drept titluri de coloane, iar denumirile categoriilor celeilalte variabile sunt folosite drept titluri de rânduri.

Teste nonparametrice: teste de semnificație care nu necesită supoziții particulare despre forma distribuției populațiilor de referință, astfel încât pot fi aplicate în special atunci când se lucrează cu eșantioane mici. Testele nonparametrice sunt cu deosebire utile în psihologie, întrucât pot fi aplicate pentru variabile măsurate la nivel nominal sau ordinal.

Testul chi-pătrat (χ^2) : test nonparametric pentru două variabile măsurate la nivel nominal și organizate într-un tabel al contingențelor. Esența acestui test constă în compararea **frecvențelor observate** – frecvențele efective obținute empiric de către cercetător – cu **frecvențele teoretice** sau **așteptate** – frecvențele calculate sub presupunerea că ipoteza de nul este adevărată.

Testul iterațiilor: test nonparametric pentru două variabile măsurate la nivel ordinal.

Testul Kruskal-Wallis H: este analogul nonparametric al testului ANOVA unifactorial, aplicabil la date de nivel ordinal.

Testul Mann-Whitney U: test nonparametric pentru două variabile măsurate la nivel ordinal.

Testul McNemar: test nonparametric pentru semnificația schimbării; acest test utilizează distribuția χ^2 și este aplicabil pentru variabile de nivel nominal, în cazul a două eșantioane dependente.

Testul medianei: test nonparametric pentru egalitatea a două mediane; acest test utilizează distribuția χ^2 și este aplicabil în cazul a două eșantioane independente, pentru variabile măsurate la nivel ordinal.

Testul Wilcoxon T: test nonparametric pentru semnificația diferenței dintre două eșantioane dependente, aplicabil pentru date de nivel ordinal.

Variabile independente: două variabile sunt independente dacă, pentru toate cazurile din eșantionul considerat, clasificarea unui caz într-o categorie a unei variabile nu are nici un efect asupra probabilității ca acel caz să fie clasificat în oricare dintre categoriile celeilalte variabile.

BCU IASI/CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

11. MĂRIMI ALE CORELAȚIEI

Mărimile corelației sunt mărimi statistice complementare testelor de semnificație și permit cuantificarea importanței (tăriei) unei relații dintre variabile. Psihologii sunt interesați să descopere dacă există relații între variabile precum inteligența și creativitatea, vechimea în muncă și satisfacția față de profesia practicată, timpul afectat vizionării emisiunilor TV și performanțele școlare etc. Mărimile corelației sunt folosite în principal pentru înțelegerea relațiilor cauzale dintre variabile și pentru predicția de la o variabilă la alta. Să precizăm. Deși mărimile corelației nu pot fi folosite pentru *a dovedi* existența relațiilor cauzale, informațiile furnizate de acestea pot fi folosite ca argumente în favoarea sau împotriva existenței relațiilor cauzale. Pe de altă parte, dacă două variabile sunt corelate, atunci putem aprecia scorurile unei variabile pe baza cunoașterii scorurilor în privința celeilalte variabile. În psihologie, o astfel de apreciere se numește **predicție**. O predicție este cu atât mai precisă cu cât corelația dintre cele două variabile este mai puternică.

În cele ce urmează, vom folosi tabelele cu dublă intrare pentru a introduce noțiunea de **corelație**, vom prezenta calcularea și interpretarea diferitelor mărimi ale corelației bivariate (corelația dintre două variabile) și vom aborda unele aspecte ale corelației multivariate (corelația dintre mai mult de două variabile).

11.1. NOȚIUNEA DE CORELAȚIE

Se spune că două variabile sunt **corelate** dacă distribuția scorurilor uneia dintre acestea se schimbă sub influența scorurilor celeilalte.

Să presupunem că ne interesează relația dintre satisfacția față de meseria practicată și productivitatea muncii pentru muncitorii unei fabrici. Dacă aceste două variabile sunt corelate, atunci nivelurile de productivitate a muncii vor varia sub influența nivelurilor de satisfacție. Tabelul 11.1 prezintă relația în discuție pentru un eșantion de 173 de muncitori (date fictive).

Tabelul 11.1. Productivitatea şi satisfacţia faţă de meseria practicată

Productivitatea (Y)	Satisfacţia faţă de meserie (X)			TOTAL
	Scăzută	Medie	Înaltă	
Înaltă	10	15	27	52
Medie	20	25	18	63
Scăzută	30	21	7	58
TOTAL	60	61	52	173

Ca şi până acum, într-un tabel cu dublă intrare vom urma convenţia tacită de a lua denumirile categoriilor variabilei independente (X) drept capete de coloane, iar denumirile categoriilor variabilei dependente (Y) drept capete de rânduri.

Într-un astfel de tabel, distribuţiile de frecvenţe „pe coloană" sunt numite **distribuţii condiţionate ale variabilei dependente**, deoarece prezintă distribuţia scorurilor variabilei dependente pentru fiecare scor (condiţie) al (a) variabilei independente. De pildă, în tabelul 11.1, prima coloană din stânga arată că din 60 de muncitori cu satisfacţie scăzută faţă de meseria practicată, 10 sunt înalt productivi, 20 sunt mediu productivi, iar 30 au o productivitate medie. Inspectarea acestor distribuţii condiţionate ne permite să observăm efectele variabilei independente asupra variabilei dependente. Astfel, constatăm că distribuţiile condiţionate ale variabilei *productivitate* se schimbă în funcţie de diferitele scoruri ale variabilei *satisfacţie*. De pildă, jumătate dintre muncitorii cu satisfacţie scăzută faţă de meserie (30) au o productivitate scăzută, în timp ce peste jumătate dintre muncitorii cu satisfacţie înaltă faţă de meserie (27) au o productivitate înaltă. Aceasta arată că productivitatea în muncă şi satisfacţia faţă de meseria aleasă sunt corelate.

În tabelul 11.1, compararea distribuţiilor condiţionate ale variabilei dependente este uşor de făcut, deoarece marginalele coloanelor au valori apropiate. În mod obişnuit, nu aceasta este situaţia şi de aceea este util să controlăm distribuţiile condiţionate care dau totaluri diferite prin calcularea procentelor corespunzătoare în sensul variabilei independente (pe coloane) şi apoi să le comparăm în sensul variabilei dependente (pe rânduri). În tabelul 11.2 sunt prezentate procentele pentru datele din tabelul 11.1 (valori rotunjite), calculate în modul indicat.

Tabelul 11.2. Productivitatea şi satisfacţia faţă de meseria practicată
(în procente)

Productivitatea (Y)	Satisfacţia faţă de meserie (X)		
	Scăzută	Medie	Înaltă
Înaltă	17%	25%	52%
Medie	33	41	35
Scăzută	50	34	13
TOTAL	100% (60)	100% (61)	100% (52)

Să observăm că în tabelul 11.2 marginalele rândurilor au fost omise, iar marginalele coloanelor, faţă de care au fost calculate procentele, sunt prezentate între paranteze.

Putem vedea imediat că poziţia celulei cu cea mai mare frecvenţă relativă se schimbă de la o coloană la alta. Astfel, pentru muncitorii cu un nivel de satisfacţie scăzut, celula cu cea mai mare frecvenţă relativă (50%) se află pe ultimul rând; pentru muncitorii cu un nivel mediu de satisfacţie, celula cu cea mai mare frecvenţă relativă (41%) se află pe rândul din mijloc; în fine, pentru muncitorii cu un nivel înalt de satisfacţie, celula cu cea mai mare frecvenţă relativă se află pe primul rând. Aceste rezultate întăresc concluzia că există o corelaţie între cele două variabile.

Dacă două variabile nu sunt corelate, atunci distribuţiile condiţionate ale variabilei dependente nu se vor modifica de la o coloană la alta sau, altfel spus, distribuţiile variabilei dependente vor fi aceleaşi pentru fiecare condiţie a variabilei independente. Dacă, de pildă, în loc de variabila *satisfacţie* am lua variabila *culoarea părului*, am obţine în fiecare celulă, probabil, un procent de aproximativ 33,3%.

Dacă două variabile sunt corelate, iar variabilele respective se află cel puţin la nivel ordinal, atunci se poate indica un sens al corelaţiei. Acesta poate fi *pozitiv* (direct) sau *negativ* (invers). De pildă, dacă se constată că performanţele şcolare ale unui eşantion de elevi într-o anumită perioadă sunt cu atât mai bune cu cât elevii respectivi au afectat un număr mai mare de ore pe săptămână studiului individual în acea perioadă, atunci se spune că între studiul individual şi performanţele şcolare există o corelaţie pozitivă. Dacă se constată că performanţele şcolare ale unui eşantion de elevi sunt cu atât mai slabe cu cât elevii respectivi au afectat un număr mai mare de ore pe săptămână vizionării emisiunilor TV, atunci se spune că între vizionarea emisiunilor TV şi performanţele şcolare există o corelaţie negativă. În general, două variabile sunt **corelate pozitiv** la nivelul unui

eşantion dacă subiecţii din eşantion care au scoruri înalte în privinţa unei variabile au scoruri înalte şi în privinţa celeilalte variabile, iar cei care au scoruri joase în privinţa unei variabile au scoruri joase în privinţa celeilalte variabile. Altfel spus, într-o corelaţie pozitivă, o variabilă creşte sau descreşte în valoare după cum creşte sau descreşte cealaltă. Tabelul 11.2. arată că variabilele *satisfacţie* şi *productivitatea muncii* sunt corelate pozitiv: un nivel înalt de satisfacţie este asociat cu un nivel înalt de productivitate, satisfacţia medie este asociată cu productivitatea medie, iar satisfacţia scăzută cu productivitatea scăzută. Două variabile sunt **corelate negativ** la nivelul unui eşantion dacă subiecţii din eşantion care au scoruri înalte în privinţa unei variabile au scoruri joase în privinţa celeilalte variabile. Altfel spus, într-o corelaţie negativă, creşterea valorii unei variabile este însoţită de descreşterea valorii celeilalte variabile. Tabelul 11.3 prezintă o corelaţie negativă între nivelul de educaţie şi vizionarea programelor TV (date fictive).

Tabelul 11.3. Nivelul de educaţie şi vizionarea programelor TV
(ilustrare pentru „corelaţie negativă")

Gradul de urmărire a programelor TV	Nivelul de educaţie		
	Scăzut	Mediu	Înalt
Înalt	60%	20%	10%
Mediu	30	60	30
Scăzut	10	20	60
TOTAL	100%	100%	100%

Orice corelaţie, pozitivă sau negativă, poate fi apreciată după *tăria* sau *puterea* sa. Un caz extrem este cel al **corelaţiei perfecte**. Corelaţia dintre două variabile este perfectă dacă fiecare scor al unei variabile este asociat cu un singur scor al celeilalte variabile, astfel încât scorurile unei variabile pot fi determinate exact pe baza cunoaşterii scorurilor celeilalte variabile. Dacă, de pildă, între nivelul de educaţie şi vizionarea programelor TV ar fi o corelaţie (negativă) perfectă, atunci într-un tabel cu dublă intrare pentru aceste variabile, toate cazurile de pe fiecare coloană ar fi localizate într-o singură celulă, ceea ce ar arăta că nu există nici o variaţie a variabilei Y pentru orice scor dat al variabilei X. O astfel de situaţie este prezentată în tabelul 11.4.

Tabelul 11.4. Nivelul de educaţie şi vizionarea programelor TV
(ilustrare pentru „corelaţie negativă perfectă")

Gradul de urmărire a programelor TV	Nivelul de educaţie		
	Scăzut	Mediu	Înalt
Înalt	100%	0%	0%
Mediu	0	100	0
Scăzut	0	0	100
TOTAL	100%	100%	100%

O corelaţie perfectă ar putea fi luată drept o dovadă puternică pentru o relaţie cauzală între variabile, cel puţin pentru eşantionul respectiv. Rezultatele prezentate în tabelul 11.4 ar indica faptul că, pentru eşantionul considerat, este foarte probabil ca singura cauză a gradului de urmărire a programelor TV să fie nivelul de educaţie. De asemenea, o corelaţie perfectă ar permite predicţii fără eroare de la o variabilă la alta. De pildă, dacă am şti că o persoană din eşantion are un nivel înalt de educaţie, am putea prezice cu exactitate că gradul de urmărire a programelor TV pentru acea persoană este scăzut. Corelaţia perfectă este un caz ideal, care nu se întâlneşte în practica cercetării psihologice, dar care este luat ca reper pentru aprecierea tăriei corelaţiilor dintre variabilele de interes.

În cele ce urmează, vom prezenta o serie de mărimi ale corelaţiei pentru diferite niveluri de măsură. Aproape toate aceste mărimi sunt concepute astfel încât să aibă limita inferioară 0, indicând cazul „nici o corelaţie", şi limita superioară 1 pentru nivelul nominal, respectiv ±1 pentru celelalte niveluri, indicând cazurile „corelaţie pozitivă perfectă" (+1) sau cazul „corelaţie negativă perfectă". După cum vom vedea, semnificaţia exactă a valorilor cuprinse între 0 şi 1 (±1) diferă de la mărime la mărime. Oricum, cu cât valoarea unei astfel de mărimi este mai apropiată de 1 (±1), cu atât corelaţia respectivă este mai puternică.

11.2. MĂRIMI ALE CORELAŢIEI LA NIVEL NOMINAL

Cele mai utilizate mărimi ale corelaţiei dintre variabile măsurate la nivel nominal sunt **coeficientul φ, coeficientul de contingenţă C, coeficientul V al lui Cramer şi coeficientul λ.**

Coeficienţii φ, C şi V sunt mărimi ale corelaţiei bazate pe χ^2. Coeficientul φ se calculează cu ajutorul următoarei formule:

Formula 11.1. $\varphi = \sqrt{\frac{\chi^2}{n}}$

Să considerăm din nou tabelul 10.1, în care se prezentau datele (fictive) ale unui studiu privind sexul și dominanța funcțional-operativă a mâinilor, reprodus aici ca tabelul 11.5.

Tabelul 11.5. Sexul și dominanța funcțional-operativă a mâinilor

Dominanța	Sexul		TOTAL
	Masculin	Feminin	
Dreapta	15	35	50
Stânga	30	10	40
Ambidextru	5	5	10
TOTAL	50	50	100

După cum am constatat prin aplicarea testului χ^2, relația dintre cele două variabile este statistic semnificativă, i.e valoarea χ^2 (obținut) = 18 s-a dovedit a fi semnificativă la un nivel de încredere de 95%. Ceea ce ne interesează acum este tăria corelației. Aplicând formula 11.1, obținem:

$$\varphi = \sqrt{\frac{\chi^2}{n}} = \sqrt{\frac{18}{100}} = 0{,}42$$

Valoarea φ = 0,42 indică o corelație cel mult moderată între sex și dominanța funcțional-operativă a mâinilor. Relația dintre aceste variabile este statistic semnificativă (χ^2), dar nu este puternică. Problema este că φ ia valori cuprinse între 0 (nici o corelație) și 1 (corelație perfectă) numai pentru tabele 2 × 2. Pentru tabelele de mare dimensiune, φ poate depăși valoarea 1, ceea ce face ca interpretarea acestui coeficient să devină problematică. Oricum, după cum vom vedea, valoarea lui φ obținută pentru exemplul de mai sus este foarte apropiată de valorile obținute prin calcularea celorlalți coeficienți de corelație menționați.

Coeficientul C se calculează cu ajutorul următoarei formule:

Formula 11.2. $C = \sqrt{\frac{\chi^2}{n+\chi^2}}$

Aplicând această formulă la datele din tabelul 11.5, obținem:

$$C = \sqrt{\frac{\chi^2}{n+\chi^2}} = \sqrt{\frac{18}{100+18}} = 0{,}39$$

Deficiența coeficientului C este aceea că, fiind o mărime subunitară, nu poate lua niciodată valoarea 1. Se demonstrează că, pe măsură ce dimensiunea tabelului crește, C tinde către 1. De pildă, valoarea maximă a lui C este 0,82 pentru un tabel 3×3 și 0,87 pentru un tabel 4×4. De aceea, se recomandă folosirea acestui coeficient numai pentru tabele de mare dimensiune (aproximativ de la 10 linii sau/și coloane în sus).

Coeficientul V se calculează cu ajutorul următoarei formule:

Formula 11.3. $$V = \sqrt{\frac{\chi^2}{n(q-1)}}$$

în care q este cea mai mică dintre valorile numerice, r (număr de rânduri) și c (număr de coloane) pentru tabelul respectiv. Aplicând formula 11.3 la datele din tabelul 11.5 obținem:

$$V = \sqrt{\frac{\chi^2}{n(q-1)}} = \sqrt{\frac{18}{100(2-1)}} = 0{,}42$$

După cum se poate constata, rezultatul obținut prin calcularea coeficientului V este același cu cel obținut prin calcularea coeficientului φ. Coeficientul V are valoarea maximă 1, dar numai pentru tabele mai mari de 2×2.

Cu toate deficiențele lor, întrucât sunt ușor de calculat, coeficienții φ, C și V pot fi folosiți în calitate de primi indici ai importanței unei corelații.

În situații de cercetare mai pretențioase se obișnuiește să se utilizeze coeficientul λ, care ia valori cuprinse între 0 și 1. În cazul în care nu se dorește sau nu se poate identifica variabila independentă, se folosește varianta simetrică a coeficientului λ, a cărui formulă de calcul este următoarea:

Formula 11.4. $$\lambda = \frac{\sum_{x=1}^{c} n_{mx} + \sum_{y=1}^{r} n_{my} - n_{mc} - n_{mr}}{2n - n_{mc} - n_{mr}}$$

în care n_{mx} = cea mai mare frecvență în coloana x;
n_{my} = cea mai mare frecvență în rândul y;
n_{mc} = cel mai mare marginal de coloană;
n_{mr} = cel mai mare marginal de rând.

Să presupunem că într-o cercetare privind relația dintre apartenența religioasă și atitudinea față de pedeapsa capitală s-au obținut rezultatele din tabelul 11.6.

Tabelul 11.6. Apartenența religioasă și atitudinea față de pedeapsa capitală

Atitudinea	Apartenența religioasă				
	Creștin-ortodox	Catolic	Altele	Nici una	TOTAL
Favorabilă	5	10	9	14	38
Neutră	10	14	12	6	42
Împotrivă	25	11	4	10	50
TOTAL	40	35	25	30	130

Pentru datele din acest tabel avem:

$$\sum_{x=1}^{c} n_{mx} = 25 + 14 + 12 + 14 = 65$$

$$\sum_{y=1}^{r} n_{my} = 14 + 14 + 25 = 53$$

$$n_{mc} = 40$$

$$n_{mr} = 50$$

Aplicând formula 11.4, obținem:

$$\lambda = \frac{\sum_{x=1}^{c} n_{mx} + \sum_{y=1}^{r} n_{my} - n_{mc} - n_{mr}}{2n - n_{mc} - n_{mr}} = \frac{65 + 53 - 40 - 50}{2(130) - 40 - 50} = 0{,}16$$

Dacă se poate identifica variabila independentă, atunci se folosește varianta asimetrică a coeficientului λ, notat λ_y, a cărui formulă de calcul este următoarea:

Formula 11.5. $\lambda_y = \dfrac{\sum_{x=1}^{c} n_{mx} - n_{mr}}{n - n_{mr}}$

Considerând exemplul de mai sus, dacă cercetătorul identifică drept variabilă independentă apartenența religioasă, atunci se obține:

$$\lambda_y = \frac{\sum_{x=1}^{c} n_{mx} - n_{mr}}{n - n_{mr}} = \frac{65 - 50}{130 - 50} = 0{,}19$$

Pentru cele mai multe situații de cercetare, interpretarea celor două variante ale coeficientului λ este similară interpretării coeficienților C și V.

Pentru exemplul considerat aici, putem conchide că cele două variabile sunt corelate, dar că această corelație este slabă[1].

11.3. MĂRIMI ALE CORELAȚIEI LA NIVEL ORDINAL

Vom prezenta patru coeficienți ai corelației, utilizabili la nivel ordinal: γ al lui Goodman și Kruskal, d al lui Somer, τ_b al lui Kendall și ρ_s al lui Spearman[2]. Acești coeficienți iau valori cuprinse între 0 și ±1 (τ_b numai pentru cazul $r = c$).

Coeficientul γ se utilizează în situații de cercetare în care avem două variabile măsurate la nivel ordinal cu un număr mic de valori (nu mai mult de cinci sau șase). Să presupunem că am obținut următoarele date privind vechimea în muncă și descurajarea profesională pentru un eșantion de 100 de cadre didactice din învățământul primar:

Tabelul 11.7. Vechimea în muncă și descurajarea profesională

Nivel de descurajare profesională	Vechime în muncă			
	Inferioară	Medie	Superioară	TOTAL
Superior	8	11	21	40
Mediu	10	15	5	30
Inferior	20	6	4	30
TOTAL	38	32	30	100

Pentru a calcula coeficientul γ, sunt necesare două cantități, notate cu N_a și respectiv N_d. Cantitatea N_a reprezintă numărul total de perechi de cazuri dispuse în aceeași ordine în privința ambelor variabile. Cantitatea N_d reprezintă numărul total de perechi de cazuri ordonate diferit în privința celor două variabile. Pentru aflarea acestor două cantități, vom lucra cu frecvențele celulelor, considerând celulă cu celulă.

Pentru înlesnirea referirii la celulele unui tabel $n \times m$ vom numerota rândurile de la 1 la n începând de sus în jos și, de asemenea, coloanele de la 1 la m începând de la stânga la dreapta; pentru fiecare celulă, vom folosi o notație de forma c_{ij}, în care i este numărul rândului, iar j numărul coloanei. Pentru un tabel 3 × 3, cum este 11.7, avem:

---

[1] Pentru o prezentare detaliată a coeficientului λ ca o mărime a reducerii proporționale a erorilor (RPE), vezi Healey, 1984, p. 223-228.

[2] γ, d și τ_b pot fi interpretați ca mărimi ale RPE (vezi *ibidem*, cap. 14).

c_{11}	c_{12}	c_{13}
c_{21}	c_{22}	c_{23}
c_{31}	c_{32}	c_{33}

Pentru a afla cantitatea N_a, se înmulțește frecvența din fiecare celulă cu suma frecvențelor din toate celulele situate deasupra și la dreapta celulei respective, după care se adună produsele astfel obținute. Să observăm că nici una dintre celulele situate pe primul rând sau pe ultima coloană nu poate contribui la N_a, deoarece nu există celule situate deasupra și la dreapta acestora. Calcularea N_a pentru tabelul 11.7 decurge după cum urmează:

Pentru c_{31}: $20(11 + 21 + 15 + 5) = 1040$
Pentru c_{32}: $6(21 + 5) = 156$
Pentru c_{21}: $10(11 + 21) = 320$
Pentru c_{22}: $15 \cdot 21 = 315$
$N_a = 1831$

Procedeul de calculare a N_d urmează o schemă simetrică față de cel pentru N_a: se înmulțește frecvența din fiecare celulă cu suma frecvențelor din toate celulele situate deasupra și la stânga celulei respective, după care se adună produsele astfel obținute. Ca mai sus, să observăm că nici una dintre celulele situate pe primul rând sau pe prima coloană nu poate contribui la N_d, deoarece nu există celule situate deasupra și la stânga acestora. Calcularea N_d pentru tabelul 11.7 decurge după cum urmează:

Pentru c_{33}: $4 (8 + 11 + 10 + 15) = 176$
Pentru c_{32} $6 (8 + 10) = 108$
Pentru c_{23} $5 (8 + 11) = 95$
Pentru c_{22}: $15 \cdot 8 = 120$
$N_d = 499$

În tabelul 11.7, un număr total de 1831 de perechi de cazuri sunt dispuse în aceeași ordine în privința ambelor variabile și un număr total de 499 de perechi de cazuri sunt ordonate diferit în privința celor două variabile.

Coeficientul γ se calculează cu ajutorul următoarei formule:

Formula 11.6. $$\gamma = \frac{N_a - N_d}{N_a + N_d}$$

Valoarea coeficientului γ pentru datele din tabelul 11.7 este:

$$\gamma = \frac{N_a - N_d}{N_a + N_d} = \frac{1831 - 499}{1831 + 499} = 0{,}57$$

Vom conchide că vechimea în muncă este corelată cu nivelul de descurajare profesională, această corelație fiind pozitivă: dacă, de pildă, știm că A are o vechime mai mare în muncă decât B, suntem îndreptățiți să spunem că este probabil ca A să aibă un nivel de descurajare profesională mai înalt decât B.

Este important de observat că aplicarea coeficientului γ presupune (pentru a obține cantitățile N_a și N_d) ca tabelul pe care se lucrează să fie construit în maniera tabelului 11.7, cu categoriile de pe coloane dispuse în ordine crescătoare de la stânga la dreapta și categoriile de pe linii dispuse în ordine crescătoare de jos în sus; γ este o mărime simetrică a corelației: valoarea acestui coeficient va fi aceeași, indiferent de variabila care este luată ca independentă.

Ca și γ, coeficienții d al lui Somer și τ_b al lui Kendall se utilizează în situații de cercetare în care avem două variabile măsurate la nivel ordinal cu un număr mic de valori și necesită calcularea cantităților N_a și N_d. În plus, acești coeficienți necesită calcularea a două cantități, notate L_y și respectiv L_x. Cantitatea L_y reprezintă numărul total de perechi de cazuri care fac parte din aceeași categorie a variabilei dependente. Cantitatea L_x reprezintă numărul total de perechi de cazuri care fac parte din aceeași categorie a variabilei independente. În general, cazurile care fac parte din aceeași categorie a unei variabile se numesc *cazuri legate* în privința variabilei respective.

Numărul total de perechi de cazuri legate în privința variabilei dependente, L_y, se determină aflând numărul de perechi de cazuri de pe fiecare rând (prin definiție, toate cazurile aflate pe același rând sunt legate în privința variabilei dependente) și adunând cantitățile astfel obținute. Pentru a afla contribuția fiecărui rând la L_y, se înmulțește frecvența din fiecare celulă cu suma frecvențelor din toate celulele situate la dreapta (pe rândul respectiv), după care se adună produsele astfel obținute. Evident, celulele situate pe ultima coloană nu pot contribui la L_y, deoarece nu există celule situate la dreapta acestora. Calcularea L_y pentru tabelul 11.7 decurge după cum urmează:

Pentru rândul 1: $8(11 + 21) + (11 \cdot 21) = 487$
Pentru rândul 2: $10(15 + 5) + (15 \cdot 5) = 275$
Pentru rândul 3: $20(6 + 4) + (6 \cdot 4) = \underline{224}$
$L_y = 986$

Numărul total de perechi de cazuri legate în privința variabilei independente, L_x, se determină analog, lucrând însă pe coloane. Pentru a afla contribuția fiecărei coloane la L_x, se înmulțește frecvența din fiecare celulă cu suma frecvențelor din toate celulele situate dedesubt (pe coloana respectivă), după care se adună produsele astfel obținute. Evident celulele situate pe ultimul rând nu pot contribui la L_x, deoarece nu există celule

situate dedesubtul acestora. Calcularea L_x pentru tabelul 11.7 decurge după cum urmează:

Pentru coloana 1: $8(10 + 20) + (10 \cdot 20) = 440$

Pentru coloana 2: $11(15 + 6) + (15 \cdot 6) = 321$

Pentru coloana 3: $21(5 + 4) + (5 \cdot 4) = 209$

$L_x = 970$

În tabelul 11.7, un număr total de 986 de perechi de cazuri sunt legate în privința variabilei dependente și un număr total de 970 de perechi de cazuri sunt legate în privința variabilei independente.

Coeficientul *d* al lui Somer se calculează cu ajutorul următoarei formule:

Formula 11.7. $$d = \frac{N_a - N_d}{N_a + N_d + L_y}$$

Să observăm că această formulă diferă de formula pentru γ numai prin adunarea cantității L_y la numitor, ceea ce face ca d să fie o mărime a corelației mai conservatoare decât γ, deoarece valoarea lui d va fi întotdeauna mai mică decât valoarea lui γ pentru același tabel. Pentru tabelul 11.7, avem:

$$d = \frac{N_a - N_d}{N_a + N_d + L_y} = \frac{1831 - 449}{1831 + 449 + 986} = 0{,}40$$

Această valoare a coeficientului d indică o corelație pozitivă de tărie moderată între cele două variabile.

După cum se poate constata, coeficientul d este o mărime asimetrică a corelației. Dacă variabila ale cărei categorii sunt capete de rânduri este luată drept variabilă independentă, atunci se calculează numărul de perechi de cazuri pe coloane și nu pe rânduri (în notația noastră, în formula 11.7 se ia L_x în loc de L_y. În cazul datelor din tabelul 11.7, valorile cantităților L_x și L_y sunt apropiate, ceea ce înseamnă că o astfel de schimbare nu ar afecta mult valoarea coeficientului d. În cazul în care cele două cantități sunt sensibil diferite, trebuie să fim precauți în privința alegerii variabilei dependente, deoarece valoarea lui d poate fi considerabil afectată de această decizie.

Coeficientul τ_b al lui Kendall este o mărime simetrică a corelației, întrucât ține cont atât de L_y, cât și de L_x. Formula sa de calcul este următoarea:

Formula 11.8. $$\tau_b = \frac{N_a - N_d}{\sqrt{(N_a + N_d + L_y)(N_a + N_d + L_x)}}$$

Pentru tabelul 11.7 avem:

$$\tau_b = \frac{N_a - N_d}{\sqrt{(N_a + N_d + L_y)(N_a + N_d + L_x)}} =$$

$$= \frac{1831 - 499}{\sqrt{(1831 + 499 + 986)(1831 + 499 + 970)}} = 0{,}40$$

Particularitatea coeficientului τ_b constă în aceea că poate lua valori cuprinse între 0 şi ±1 doar pentru tabele pătratice ($r = c$), deci nu se recomandă calcularea sa pentru orice tabel rectangular.

Coeficientul ρ_s al lui Spearman se utilizează, de regulă, în situaţii de cercetare în care avem două variabile măsurate la nivel ordinal, care au o amplitudine relativ largă de scoruri diferite şi puţine cazuri legate în privinţa fiecărei variabile. Să presupunem că dorim să verificăm ipoteza conform căreia persoanele care practică jogging au un sentiment mai puternic de respect faţă de sine. Pentru aceasta, 10 persoane care practică jogging au fost chestionate cu ajutorul a două scale, prima măsurând gradul de implicare în practicarea jogging-ului, cealaltă măsurând nivelul respectului faţă de sine. Datele obţinute, împreună cu o serie de calcule cerute de determinarea coeficientului ρ_s, sunt prezentate în tabelul 11.8.

Tabelul 11.8. Practicarea jogging-ului şi respectul faţă de sine

Cazul	Nivel de implicare	Rangul	Respect faţă de sine	Rangul	d	d^2
1	18	1	15	3	–2	4
2	17	2	18	1	1	1
3	15	3	12	4	–1	1
4	12	4	16	2	2	4
5	10	5	6	8	–3	9
6	9	6	10	5	1	1
7	8	7,5	8	6	1,5	2,25
8	8	7,5	7	7	0,5	0,25
9	5	9	5	9	0	0
10	1	10	2	10	0	0
					$\sum d = 0$	$\sum d^2 = 22{,}5$

Mai întâi, atribuim ranguri scorurilor fiecărei valori, începând cu cel mai mare scor. Apoi, pentru fiecare caz, calculăm diferenţa dintre rangul scorului în privinţa primei variabile (X) şi rangul scorurilor în privinţa celeilalte variabile (Y) (în tabel, coloana etichetată d). Să observăm că suma acestor diferenţe este 0, ceea ce înseamnă că diferenţele negative sunt egale cu cele pozitive, acesta fiind întotdeauna cazul. Dacă obţinem $\sum d \neq 0$, atunci am greşit în atribuirea rangurilor sau/şi în calcularea diferenţelor.

Fiecare diferență astfel obținută este apoi ridicată la pătrat pentru a elimina semnele minus (în tabel, coloana d^2), după care se calculează suma acestor diferențe ridicate la pătrat, $\sum d^2$.

Formula de calcul a coeficientului ρ_s al lui Spearman este următoarea:

Formula 11.9. $$\rho_s = 1 - \frac{6\Sigma d^2}{n(n^2-1)}$$

în care n este numărul de perechi de ranguri. Aplicând această formulă la datele din tabelul 11.8, obținem:

$$\rho_s = 1 - \frac{6\Sigma d^2}{n(n^2-1)} = 1 - \frac{6 \cdot 22{,}5}{10(100-1)} = 0{,}86$$

Acest rezultat indică o corelație pozitivă puternică între cele două variabile, ceea ce susține ipoteza cercetării.

În anumite situații de cercetare ne interesează să aflăm dacă două variabile sunt corelate la nivelul populației de referință. În cazul variabilelor măsurate la nivel nominal, semnificația statistică a unei corelații este judecată, de obicei, prin intermediul testului χ^2. De asemenea, testul χ^2 poate fi aplicat și în cazul corelațiilor dintre variabile măsurate la nivel ordinal. Totuși, acest test evidențiază doar probabilitatea ca frecvențele observate să se datoreze doar întâmplării și, ca atare, nu reprezintă un test direct al corelației[3]. Pentru coeficienții γ și ρ_s au fost elaborate teste de semnificație specifice, în care ipoteza de nul enunță că nu există nici o corelație la nivelul populației, deci că valorile mărimilor respective sunt egale cu 0: $\gamma = 0$, respectiv $\rho_s = 0$. Corespunzător, ipoteza alternativă enunță că $\gamma \neq 0$ sau, respectiv, că $\rho_s \neq 0$[4]. Astfel, pentru eșantioane cu $n > 30$, distribuția de eșantionare pentru γ aproximează distribuția Z și se folosește următoarea formulă pentru calcularea statisticii testului:

Formula 11.10. $$Z = \gamma \sqrt{\frac{N_a + N_d}{n(1-\gamma^2)}}$$

---

[3] Luat în sine, χ^2 nu este o mărime a corelației. Deși valorile diferite de 0 ale lui χ^2 indică existența unei corelații, valoarea numerică *efectivă* pentru χ^2 (obținut) nu stă în nici o legătură necesară cu tăria corelației. χ^2 (obținut) poate avea o valoare mare, în timp ce corelația efectivă poate fi slabă. Cu alte cuvinte, independența (χ^2) și corelația sunt două aspecte diferite. Este perfect posibil ca două variabile să fie corelate (χ^2 (obținut) $\neq 0$) și totuși să fie independente, în cazul în care nu putem respinge ipoteza de nul.

[4] Unii autori folosesc simbolurile g și r_s, respectiv, pentru γ și ρ, atunci când este vorba despre eșantioane, rezervând literele grecești pentru cazul populațiilor.

Regulile de decizie sunt cele cunoscute pentru testul *Z*.

În cazul coeficientului ρ_s, dacă $5 \leq n \leq 30$, atunci se foloseşte **tabelul valorilor critice pentru ρ_s** (anexa H). Pentru a folosi acest tabel, se identifică valoarea critică a lui ρ_s corespunzătoare numărului de perechi de ranguri, n, şi nivelului α ales. Pentru a putea respinge ipoteza de nul şi a conchide că variabilele respective sunt corelate la nivelul populaţiei, valoarea obţinută pentru ρ_s trebuie să fie mai mare decât valoarea critică. Dacă $n > 30$, atunci distribuţia de eşantionare pentru ρ_s aproximează distribuţia t cu $gl = n - 2$ şi se foloseşte următoarea formulă pentru calcularea statisticii testului:

Formula 11.11. $t = \rho_s \sqrt{\frac{n-2}{1-\rho^2}}$

Regulile de decizie sunt cele cunoscute pentru testul *t*-Student.

11.4. MĂRIMI ALE CORELAŢIEI LA NIVEL DE INTERVAL SAU DE RAPORT

Tehnicile statistice folosite pentru analiza corelaţiei dintre variabile măsurate la nivel de interval sau de raport se bazează pe alte concepte şi modalităţi de calcul faţă de cele prezentate în secţiunea anterioară, dar urmăresc să răspundă la aceleaşi întrebări privind existenţa, sensul şi tăria unei corelaţii. În cele ce urmează, vom prezenta diagramele de împrăştiere, ecuaţia de regresie şi coeficientul de corelaţie *r* al lui Pearson.

Diagramele de împrăştiere[5] sunt modalităţi de prezentare vizuală a corelaţiei dintre două variabile măsurate la nivel de interval sau de raport şi sunt analoage funcţional tabelelor bivariate, întrucât permit sesizarea rapidă a multor trăsături importante ale unei corelaţii.

Vom exemplifica construirea unei diagrame de împrăştiere. Să presupunem că ne interesează dacă există o relaţie între abilităţile de limbaj şi cele aritmetice pentru un eşantion de 9 elevi din învăţământul primar. Rezultatele obţinute prin aplicarea testelor corespunzătoare sunt prezentate în tabelul 11.9.

[5] Aceste diagrame se mai numesc şi *scatergrame* sau *diagrame ale norilor de puncte*.

Tabelul 11.9. Abilităţi de limbaj şi abilităţi aritmetice

Elevul	Abilităţi de limbaj (X)	Abilităţi aritmetice (Y)
A	83	95
B	38	70
C	47	34
D	56	66
E	23	45
F	90	100
G	75	58
H	87	71
I	89	68

Pentru a construi o diagramă de împrăştiere, folosim un sistem de axe rectangulare, dispunând valorile variabilei X pe axa orizontală (abscisa) şi valorile variabilei Y pe axa verticală (ordonata). Ambele axe se calibrează în unităţi corespunzătoare, respectiv, scalelor de măsură folosite pentru strângerea datelor. Pentru fiecare pereche de valori (pentru fiecare caz) se plasează un punct la intersecţia perpendicularelor respective pe cele două axe. Diagrama de împrăştiere pentru datele din tabelul 11.9 este prezentată în figura 11.1.

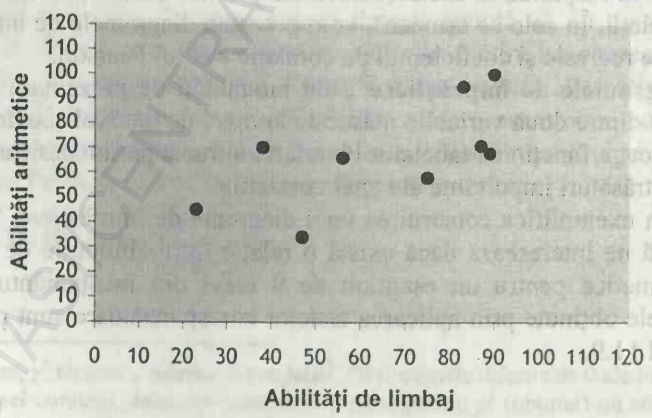
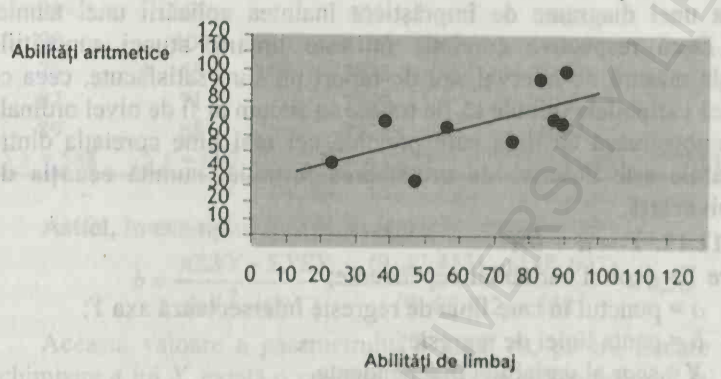


Figura 11.1. Abilităţi de limbaj şi abilităţi aritmetice

Fiecare elev este reprezentat printr-un punct plasat la intersecția celor două scoruri obținute de acesta. Dispunerea punctelor poate fi pusă în evidență prin trasarea unei linii drepte care să atingă fiecare punct sau să treacă cât se poate mai aproape posibil de fiecare punct. După cum vom vedea, această linie, numită **linie de regresie**, poate fi descrisă precis printr-o ecuație, dar deocamdată este suficientă trasarea sa aproximativă:



Punctele situate deasupra fiecărei valori *X* pot fi considerate distribuții condiționate ale lui *Y*; cu alte cuvinte, punctele reprezintă scoruri ale variabilei *Y* pentru fiecare scor al variabilei *X*. Figura 11.1 arată că aceste distribuții condiționate ale lui *Y* se modifică după cum se modifică *X* (scorurile *Y* variază în funcție de scorurile *X*), ceea ce înseamnă că cele două variabile sunt corelate. Existența unei corelații este evidențiată și de faptul că linia de regresie formează un unghi cu axa *X* (abscisa). Dacă cele două variabile nu ar fi corelate, scorurile variabilei *Y* nu s-ar modifica în funcție de scorurile *X*, astfel încât linia de regresie ar fi paralelă cu abscisa.

Sensul corelației poate fi detectat prin panta (înclinarea) liniei de regresie față de abscisă. În exemplul nostru avem o corelație pozitivă, deoarece elevii cu scoruri mari în privința variabilei *X* (*abilități de limbaj*) tind să aibă scoruri mari în privința variabilei *Y* (*abilități aritmetice*). Dacă între cele două variabile ar fi fost o corelație negativă, linia de regresie ar fi fost înclinată în direcția opusă, indicând că scorurile înalte ale unei variabile sunt asociate cu scoruri mici ale celeilalte variabile.

Tăria corelației poate fi aproximativ apreciată observând împrăștierea punctelor în jurul liniei de regresie. Într-o corelație perfectă, toate punctele

s-ar afla pe linia de regresie. Prin urmare, cu cât punctele sunt mai puțin împrăștiate în jurul liniei de regresie, cu atât corelația este mai puternică.

O supoziție esențială care stă la baza tehnicilor statistice prezentate în continuare este aceea că între cele două variabile considerate este o **corelație liniară**, ceea ce înseamnă că dispunerea punctelor poate fi aproximată printr-o linie dreaptă. Această supoziție poate fi testată prin construirea unei diagrame de împrăștiere înaintea aplicării unei tehnici statistice. Dacă respectiva corelație nu este liniară, atunci supozițiile nivelului de măsură de interval sau de raport nu sunt satisfăcute, ceea ce înseamnă că variabilele trebuie să fie tratate ca și cum ar fi de nivel ordinal.

Se demonstrează că linia care prezintă cel mai bine corelația dintre două variabile este descrisă de următoarea formulă, numită **ecuația de regresie bivariată**:

Formula 11.12. $Y = a + bX$

în care Y = scor al variabilei dependente;

a = punctul în care linia de regresie intersectează axa Y;

b = panta liniei de regresie;

X = scor al variabilei independente.

Parametrul b, numit **coeficient de regresie**, arată cantitatea de schimbare a lui Y care corespunde unei unități de schimbare a lui X. Panta unei linii de regresie poate fi pozitivă, negativă sau egală cu 0. În cazul b = 0, linia de regresie este paralelă cu abscisa (este orizontală), ceea ce înseamnă că între cele două variabile nu există nici o corelație. Coeficientul de regresie se calculează cu ajutorul următoarei formule:

Formula 11.13. $$b = \frac{n\Sigma XY - \Sigma X \Sigma Y}{n\Sigma X^2 - (\Sigma X)^2}$$

în care n = numărul de cazuri;

ΣXY = suma produselor dintre cele două scoruri ale fiecărui caz;

ΣX = suma scorurilor variabilei X;

ΣY = suma scorurilor variabilei Y;

ΣX^2 = suma pătratelor scorurilor variabilei X;

Pentru determinarea valorii coeficientului de regresie se poate folosi un tabel de calcule, ilustrat aici pentru datele din tabelul 11.9.

Tabelul 11.10. Calcule pentru coeficientul de regresie (*b*)

X	Y	X^2	Y^2	XY
83	95	6889	9025	7885
38	70	1444	4900	2660
47	34	2209	1156	1598
56	66	3136	4356	3696
23	45	529	2025	1035
90	100	8100	10000	9000
75	58	5625	3364	4350
87	71	7569	5041	6177
89	68	7921	4624	6052
$\Sigma X = 588$	$\Sigma Y = 607$	$\Sigma X^2 = 43.422$	$\Sigma Y^2 = 44.491$	$\Sigma XY = 42.453$

Astfel, în exemplul nostru, avem:

$$b = \frac{n\Sigma XY - \Sigma X \Sigma Y}{n\Sigma X^2 - (\Sigma X)^2} = \frac{(9 \cdot 42.453) - (588 \cdot 607)}{(9 \cdot 43.422) - 588^2} = 0,56$$

Această valoare a parametrului *b* arată că, pentru fiecare unitate de schimbare a lui *X*, există o creştere de 0,56 unităţi în privinţa lui *Y*. Cu alte cuvinte, o creştere cu o unitate a scorului în privinţa abilităţilor de limbaj are drept rezultat o creştere cu 0,56 a scorului în privinţa abilităţilor aritmetice.

Parametrul *a*, numit **constanta de regresie**, se calculează cu ajutorul următoarei formule:

Formula 11.14. $a = \overline{Y} - b\overline{X}$

În exemplul nostru, avem:

$$\overline{Y} = \frac{\Sigma Y}{n} = \frac{607}{9} = 67,4$$

$$\overline{X} = \frac{\Sigma X}{n} = \frac{588}{9} = 65,3$$

$$a = 67,4 - (0,56 \cdot 65,3) = 30,8$$

Această valoare a parametrului *a* arată că linia de regresie intersectează axa *Y* (ordonata) în punctul în care $Y = 30,8$. De notat că *a* poate fi calculat şi cu ajutorul următoarei formule, echivalentă algebric cu formula 11.14:

Formula 11.15. $a = \frac{\Sigma Y - b\Sigma X}{n}$

În fine, ecuaţia de regresie pentru exemplul nostru este:

$$Y = a + bX = 30,8 + (0,56 \cdot X)$$

Linia de regresie poate fi folosită pentru a face predicții asupra scorului unui caz în privința unei variabile, pornind de la scorul celuilalt caz în privința celeilalte variabile. Dacă se folosește variabila X pentru a face predicții despre variabila Y, atunci linia de regresie este denumită *regresia lui Y asupra lui X*. Pentru ilustrare, să presupunem că, pe baza corelației prezentate în figura 11.1, ne interesează să aflăm scorul în privința abilităților aritmetice al unui elev cu scorul 100 în privința abilităților de limbaj (eșantionul nu conține nici un elev cu scorul 100 la testul privind abilitățile de limbaj). Notăm scorul pe care dorim să îl aflăm („scorul prezis") cu $\hat{Y}$, pentru a-l distinge de scorurile Y efective. Folosind ecuația de regresie din exemplul nostru pentru $X = 100$, obținem:

$$\hat{Y} = 30{,}8 + (0{,}56 \cdot X) = 30{,}8 + (0{,}56 \cdot 100) = 86{,}8$$

Prin urmare, pe baza regresiei lui Y asupra lui X, prezicem că un elev cu scorul 100 în privința abilităților de limbaj va obține scorul 86,8 în privința abilităților aritmetice.

Coeficientul *r* al lui Pearson este o mărime a corelației liniare dintre două variabile măsurate la nivel de interval sau de raport, care ia valori cuprinse între 0 și ±1. Valoarea acestui coeficient poate fi calculată cu ajutorul următoarei formule:

Formula 11.16.
$$r = \frac{n\Sigma XY - \Sigma X \Sigma Y}{\sqrt{(n\Sigma X^2 - (\Sigma X)^2)(n\Sigma Y^2 - (\Sigma Y)^2)}}$$

Pentru a afla valoarea coeficientului r în cazul exemplului de mai sus, folosim tabelul 11.10, în care am adăugat deja o coloană pentru Y^2 și am calculat suma corespunzătoare. Astfel, avem:

$$r = \frac{(9 \cdot 42453) - (588 \cdot 607)}{\sqrt{((9 \cdot 43422) - 588^2)((9 \cdot 44491) - 607^2)}} = 0{,}66$$

Ca și în cazul celorlalți coeficienți ai corelației, valorile coeficientului r diferite de 0 și de ±1 nu au o interpretare directă precisă. Valorile apropiate de 0 pot fi interpretate ca indicând o corelație slabă, iar cele care se apropie de ±1 ca indicând o corelație puternică. O interpretare mai directă este dată de calcularea **coeficientului de determinare bivariată**, care este pur și simplu r^2. În exemplul nostru, $r^2 = 0{,}435$. Această valoare arată că scorurile obținute în privința abilităților de limbaj (X) explică aproximativ 43,5% din variația totală a scorurilor obținute în privința abilităților aritmetice, restul de 56,5% din această variație datorându-se probabil influenței altor variabile, erorilor de măsurare sau întâmplării.

În condițiile în care eșantionul respectiv a fost alcătuit aleatoriu, valoarea coeficientului *r* al lui Pearson poate fi testată pentru semnificația la nivelul populației de referință, distribuția de eșantionare fiind distribuția *t* cu $gl = n - 2$. Calcularea statisticii testului se face cu ajutorul următoarei formule:

Formula 11.17. $t = r\sqrt{\frac{n-2}{1-r^2}}$

Dacă variabilele sunt corelate la nivelul eșantionului și valoarea lui *t* (obținut) cade în zona critică, atunci vom respinge ipoteza de nul și vom conchide că variabilele respective sunt corelate și la nivelul populației (cu probabilitatea dată de nivelul α ales); dacă, însă, valoarea lui *t* (obținut) nu cade în zona critică, atunci nu suntem îndreptățiți să conchidem că variabilele sunt corelate la nivelul populației. Într-un astfel de caz, testul arată că valoarea coeficientului *r* la nivelul eșantionului poate să apară numai datorită întâmplării, dacă ipoteza de nul este adevărată, i.e. dacă variabilele respective nu sunt corelate la nivelul populației.

Este important de reținut că semnificația valorii coeficientului *r* poate fi testată cu ajutorul formulei 11.6 numai dacă, pe lângă supoziția de liniaritate a corelației, este satisfăcută atât supoziția că ambele variabile au o distribuție normală (**distribuție bivariată normală**), cât și supoziția că abaterile standard ale distribuțiilor condiționate ale variabilei *Y* sunt aproximativ egale. Pentru această ultimă supoziție se folosește conceptul de **homoscedasticitate**. În mod obișnuit, inspectarea vizuală a unei diagrame de împrăștiere este suficientă pentru a aprecia dacă o corelație se conformează supozițiilor de liniaritate și homoscedasticitate. După cum am arătat, dacă dispunerea punctelor poate fi aproximată printr-o linie dreaptă, atunci corelația poate fi apreciată ca fiind liniară. Pe de altă parte, dacă scorurile *Y* sunt relativ uniform împrăștiate deasupra și dedesubtul liniei de regresie, atunci corelația este homoscedastică. De pildă, după cum se poate constata imediat, corelația prezentată în figura 11.1 este homoscedastică: din cele 9 cazuri, cinci se află deasupra liniei de regresie, iar patru dedesubt.

11.5. ELEMENTE DE ANALIZĂ MULTIVARIATĂ

Unele situații de cercetare necesită analiza mai multor variabile, chiar dacă cercetătorul este interesat în principal de o anumită corelație bivariată. Tehnicile prezentate în această secțiune se referă la corelația multivariată dintre variabile măsurate la nivel de interval sau de raport și se bazează pe coeficientul *r* al lui Pearson.

11.5.1. Corelația parțială

Metoda corelației parțiale poate fi folosită atunci când cercetătorul dorește să observe influența unei a treia (a patra etc.) variabile asupra unei corelații bivariate. În cele ce urmează vom folosi următoarele simboluri, numite **coeficienți de corelație parțială de ordinul zero**:

r_{yz} = coeficientul de corelație dintre variabila Y și variabila Z;

r_{xy} = coeficientul de corelație dintre variabila X și variabila Y;

r_{xz} = coeficientul de corelație dintre variabila X și variabila Z.

Acești coeficienți se calculează cu formula 11.16.

Atunci când controlăm influența unei singure variabile X asupra corelației dintre variabilele Y și Z folosim simbolul r_{yzx}, numit **coeficient de corelație parțială de ordinul întâi**; r_{yzx} se referă la coeficientul de corelație parțială dintre variabilele Y și Z sub influența variabilei X („variabila de control"); r_{yzx} se calculează cu ajutorul următoarei formule:

Formula 11.18. $$r_{yzx} = \frac{r_{yz} - r_{xy}r_{xz}}{\sqrt{(1-r_{xy}^2)(1-r_{xz}^2)}}$$

Pentru ilustrare, să considerăm datele din tabelul 11.11, în care se prezintă distribuția a trei variabile, X, Y și Z, împreună cu valorile parțialilor de ordinul zero. Să presupunem că ne interesează influența variabilei X asupra corelației dintre Y și Z.

Tabelul 11.11. O ilustrare a corelației parțiale

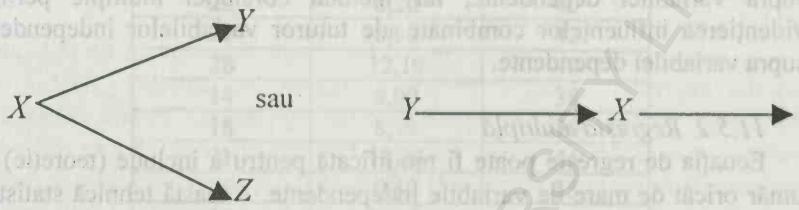
X	Y	Z
2	12	4
7	14	10
8	18	8
4	15	9
5	14	7
$r_{yz} = 0{,}50$	$r_{xy} = 0{,}78$	$r_{xz} = 0{,}70$

Valoarea $r_{yz} = 0{,}50$ indică o corelație pozitivă moderată între variabilele Y și Z. Aplicând formula 11.18, obținem:

$$r_{yzx} = \frac{r_{yz} - r_{xy}r_{xz}}{\sqrt{(1-r_{xy}^2)(1-r_{xz}^2)}} = \frac{0{,}5 - (0{,}78 \cdot 0{,}70)}{\sqrt{(1-(0{,}78)^2)(1-(0{,}70)^2)}} = -0{,}098$$

Această valoare a coeficientului parțial de ordinul întâi este mult mai mică decât valoarea coeficientului parțial de ordinul zero, $r_{yz} = 0{,}50$. Acest

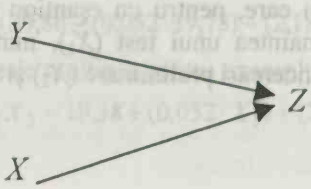
rezultat, pe care îl vom nota prin $r_{yzx} << r_{yz}$, arată că, dacă eliminăm influența variabilei X asupra variabilelor Y și Z, corelația dintre variabilele Y și Z se reduce de la 0,5 la aproape 0. Într-un astfel de caz, se poate ca X să determine atât variația lui Y, cât și variația lui Z, relația dintre Y și Z fiind inautentică (aparentă), sau ca variabilele Y și Z să fie corelate, dar nu direct, ci prin intermediul variabilei X:



În exemplul nostru, valorile $r_{xy} = 0,78$ și $r_{xz} = 0,70$ pot fi luate drept un indiciu probabil al tipului de relație reprezentat prin diagrama din stânga. De notat că distincția dintre cele două tipuri de relație nu poate fi făcută cu precizie doar pe baza metodelor statistice. Într-o situație reală de cercetare, distincția se poate face pe criterii de conținut al cercetării respective (ordinea temporală dintre variabile ș.a).

Un al doilea tip de rezultat posibil este acela în care r_{yzx} și r_{yz} au valori apropiate. Acest rezultat, pe care îl vom nota prin $r_{yzx} \cong r_{yz}$, arată că dacă eliminăm influența variabilei X asupra variabilelor Y și Z corelația dintre variabilele Y și Z rămâne neschimbată sau, altfel spus, că X nu influențează semnificativ corelația dintre Y și Z, relația dintre variabilele Y și Z fiind directă.

Al treilea tip de rezultat posibil este acela în care valoarea lui r_{yzx} este mult mai mare decât valoarea lui r_{yz}. Acest rezultat, pe care îl vom nota prin $r_{yzx} >> r_{yz}$, arată că variabila luată inițial drept independentă și variabila de control (X) au fiecare în parte o influență separată asupra variabilei dependente și nu sunt corelate una cu alta. Următoarea diagramă prezintă acest tip de relație pentru cazul în care Z este variabila dependentă:



Dacă se obține acest rezultat, concluzia este că atât Y, cât și X sunt variabile independente, iar următoarea etapă în analiza statistică este, probabil, utilizarea regresiei multiple și a corelației multiple. Metoda regresiei multiple permite izolarea influențelor separate ale mai multor variabile independente asupra variabilei dependente și astfel permite identificarea variabilei independente care are cea mai puternică influență asupra variabilei dependente, iar metoda corelației multiple permite evidențierea influențelor combinate ale tuturor variabilelor independente asupra variabilei dependente.

11.5.2. Regresia multiplă

Ecuația de regresie poate fi modificată pentru a include (teoretic) un număr oricât de mare de variabile independente. Această tehnică statistică se numește **regresie multiplă**. În cazul a două variabile independente, linia de regresie multiplă este descrisă de următoarea formulă, numită **ecuația de regresie multiplă**:

Formula 11.19. $Y = a + b_1X_1 + b_2X_2$

în care b_1 = panta parțială a corelației dintre prima variabilă independentă și Y;

b_2 = panta parțială a corelației dintre a doua variabilă independentă și Y;

Parametrii b_1 și b_2 se calculează cu ajutorul următoarelor formule:

Formula 11.20. $$b_1 = \frac{s_y}{s_1} \cdot \frac{r_{1y} - r_{2y}r_{12}}{1 - r_{12}^2}$$

Formula 11.21. $$b_2 = \frac{s_y}{s_2} \cdot \frac{r_{2y} - r_{1y}r_{12}}{1 - r_{12}^2}$$

în care s_y = abaterea standard a variabilei Y;

s_1 = abaterea standard a variabilei independente X_1;

s_2 = abaterea standard a variabilei independente X_2;

r_{1y} = coeficientul de corelație dintre X_1 și Y;

r_{2y} = coeficientul de corelație dintre X_2 și Y;

r_{12} = coeficientul de corelație dintre X_1 și X_2.

Pentru a ilustra calcularea parametrilor b_1 și b_2, să considerăm datele din tabelul 11.12, în care, pentru un eșantion de 15 subiecți, se prezintă scorurile obținute înaintea unui test (X_1), numărul mediu de răspunsuri corecte date la șase încercări preliminare (X_2) și scorurile posttest (Y).

Tabelul 11.12. O ilustrare pentru două variabile independente

X_1	X_2	Y
15	7,70	36
22	8,20	39
16	7,80	35
19	9,30	43
22	8,20	40
20	8,80	42
28	12,10	49
14	8,00	38
18	8,10	36
21	11,20	44
26	9,40	35
14	10,30	43
19	8,50	37
22	7,60	41
20	8,40	40
$s_1 = 4,06$	$s_2 = 1,34$	$s_3 = 3,92$
$r_{1y} = 0,39$	$r_{2y} = 0,77$	$r_{12} = 0,45$

Aplicând formulele 11.20 și 11.21, obținem:

$$b_1 = \frac{s_y}{s_1} \cdot \frac{r_{1y} - r_{2y} r_{12}}{1 - r_{12}^2} = \frac{3,92}{4,06} \cdot \frac{0,39 - (0,77 \cdot 0,45)}{1 - (0,45)^2} = 0,052$$

$$b_2 = \frac{s_y}{s_2} \cdot \frac{r_{2y} - r_{1y} r_{12}}{1 - r_{12}^2} = \frac{3,92}{1,34} \cdot \frac{0,77 - (0,39 \cdot 0,45)}{1 - (0,45)^2} = 2,18$$

Parametrul a se calculează cu ajutorul următoarei formule:

Formula 11.22. $a = \overline{Y} - b_1 \overline{X}_1 - b_2 \overline{X}_2$

În exemplul nostru, avem:

$$\overline{X}_1 = \frac{\Sigma X_1}{n} = \frac{295}{15} = 19,73 \quad \overline{X}_2 = \frac{\Sigma X_2}{n} = \frac{133,6}{15} = 8,90$$

$$\overline{Y} = \frac{\Sigma Y}{n} = \frac{598}{15} = 39,86$$

$$a = \overline{Y} - b_1 \overline{X}_1 - b_2 \overline{X}_2 = 39,86 - (0,052 \cdot 19,73) - (2,18 \cdot 8,90) = 19,38$$

În fine, ecuația de regresie multiplă pentru exemplul nostru este:

$$Y = a + b_1 X_1 + b_2 X_2 = 19,38 + (0,052 \cdot X_1) + (2,18 \cdot X_2)$$

Acum, să presupunem că ne interesează să prezicem scorul posttest al unui subiect cu scorul pretest de 25 şi media răspunsurilor corecte la încercările preliminare de 11,16. Folosind ecuaţia de regresie multiplă din exemplul nostru pentru $X_1 = 25$ şi $X_2 = 11,16$ obţinem:

$$\hat{Y} = 19,38 + (0,052 \cdot 25) + (2,18 \cdot 11,16) = 45$$

Prin urmare, prezicem că un subiect cu scorurile $X_1 = 25$ şi $X_2 = 11,16$ va obţine un scor posttest de 45.

În cele ce urmează prezentăm o modalitate simplificată de utilizare a metodei regresiei multiple pentru evaluarea influenţelor separate ale variabilelor independente asupra variabilei dependente. Pentru o astfel de evaluare se consideră scorurile standardizate ale variabilelor şi se utilizează **coeficienţii de regresie standardizaţi**, simbolizaţi în general prin β. Aceste mărimi, numite şi „pante parţiale standardizate", arată cantitatea de schimbare a abaterii standard a variabilei Y corespunzătoare unei unităţi de schimbare a abaterii standard a unei variabile independente, în timp ce influenţele celorlalte variabile independente sunt controlate. În cazul a două variabile independente, aceşti coeficienţi se calculează cu ajutorul următoarelor formule:

Formula 11.23. $\beta_1 = b_1 \frac{s_1}{s_y}$

Formula 11.24. $\beta_2 = b_2 \frac{s_2}{s_y}$

în care β_1 = panta parţială standardizată a corelaţiei dintre X_1 şi Y;

β_2 = panta parţială standardizată a corelaţiei dintre X_2 şi Y.

Ecuaţia de regresie multiplă standardizată este dată de următoarea formulă:

Formula 11.25. $Z_y = a_z + \beta_1 Z_1 + \beta_2 Z_2$

în care simbolul Z arată că toate scorurile au fost standardizate. Amintim că formula de calcul pentru standardizarea scorurilor unui eşantion este

$$Z = \frac{X - \overline{X}}{s}$$

Acum, formula 11.25 poate fi simplificată, întrucât definiţia algebrică a parametrului a_z este $a_z = \overline{Y} - b_1\overline{Z}_1 - b_2\overline{Z}_2$ şi, după cum ştim, media aritmetică a oricărei distribuţii standardizate de scoruri este 0. Ca atare, a_z se reduce la 0, astfel încât pentru ecuaţia de regresie multiplă standardizată putem folosi următoarea formulă:

B.C.U. „M. EMINESCU" IAŞI

Formula 11.26. $Z_y = \beta_1 Z_1 + \beta_2 Z_2$

Pentru exemplul de mai sus, valorile coeficienților de regresie standardizați sunt:

$$\beta_1 = b_1 \frac{s_1}{s_y} = 0{,}052 \frac{4{,}06}{3{,}92} = 0{,}0538$$

$$\beta_2 = b_2 \frac{s_2}{s_y} = 2{,}18 \frac{1{,}34}{3{,}92} = 0{,}74$$

Astfel, ecuația de regresie multiplă standardizată pentru acest exemplu este:

$$Z_y = (0{,}0538 \cdot Z_1) + (0{,}74 \cdot Z_2)$$

Concluzia este că variabila X_2 are o influență mult mai puternică asupra variabilei dependente decât variabila X_1, astfel încât predicțiile asupra scorurilor standardizate Z_y nu vor fi influențate semnificativ de scorurile Z_1.

Inspectarea datelor din tabelul 11.12 oferă unele indicii privind explicația rezultatului obținut. Astfel, putem observa că X_2 este puternic corelată cu Y ($r_{2y} = 0{,}77$), în timp ce X_1 prezintă o corelație slabă până la moderat cu Y ($r_{1y} = 0{,}39$).

De notat că dacă am fi obținut $\beta_1 >> \beta_2$, am fi tras concluzia că variabila X_1 are o influență mult mai puternică asupra variabilei dependente decât variabila X_2, iar dacă am fi obținut $\beta_1 \cong \beta_2$, am fi tras concluzia că cele două variabile independente au aproximativ aceeași influență asupra variabilei dependente.

11.5.3. Corelația multiplă

Metoda corelației multiple permite evidențierea influențelor combinate ale tuturor variabilelor independente asupra variabilei dependente. Pentru aceasta, vom calcula **coeficientul de corelație multiplă** R și **coeficientul de determinare multiplă** R^2.

O formulă de calcul pentru coeficientul R în cazul a două variabile independente este următoarea:

Formula 11.27. $R = \sqrt{\beta_1 r_{1y} + \beta_2 r_{2y}}$

Pentru datele din exemplul de mai sus, avem:

$$R = \sqrt{\beta_1 r_{1y} + \beta_2 r_{2y}} = \sqrt{(0{,}0538 \cdot 0{,}39) + (0{,}74 \cdot 0{,}77} = 0{,}77$$

Acest rezultat indică o corelație puternică între influențele combinate ale variabilelor X_1 și X_2 și variabila Y.

Coeficientul de determinare multiplă R^2 se interpretează în același fel ca și coeficientul de determinare bivariată r^2. În exemplul nostru, $R^2 = 0,59$, ceea ce arată că influența combinată a celor două variabile independente explică aproximativ 59% din variația totală a scorurilor posttest, restul de 41% din această variație datorându-se probabil influenței altor variabile, erorilor de măsurare sau întâmplării.

BCU IAȘI/CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

GLOSAR

Coeficientul *d* al lui Somer: mărime asimetrică a corelației, adecvată pentru cazul a două variabile măsurate la nivel ordinal cu un număr mic de valori.

Coeficientul de contingență *C*: mărime a corelației bazată pe χ^2, adecvată pentru cazul a două variabile măsurate la nivel nominal; se recomandă calcularea acestui coeficient numai pentru tabele de mari dimensiuni.

Coeficientul *r* al lui Pearson: mărime a corelației liniare dintre două variabile măsurate la nivel de interval sau de raport.

Coeficientul *V* al lui Cramer: mărime a corelației bazată pe χ^2, adecvată pentru cazul a două variabile măsurate la nivel nominal; se recomandă calcularea acestui coeficient numai pentru tabele mai mari de 2×2.

Coeficientul *γ*: mărime simetrică a corelației adecvată pentru cazul a două variabile măsurate la nivel ordinal cu un număr mic de valori.

Coeficientul *ρ* al lui Spearman: mărime a corelației adecvată pentru cazul a două variabile măsurate la nivel ordinal cu o amplitudine relativ largă de scoruri diferite și puține cazuri legate în privința fiecărei variabile.

Coeficientul τ_b al lui Kendall: mărime simetrică a corelației, adecvată pentru cazul a două variabile măsurate la nivel ordinal cu un număr mic de valori; se recomandă calcularea acestui coeficient numai pentru tabele pătratice.

Coeficientul *φ*: mărime a corelației bazată pe χ^2, adecvată pentru cazul a două variabile măsurate la nivel nominal; se recomandă calcularea acestui coeficient numai pentru tabele 2×2.

Corelație: relație între două sau mai multe variabile; se spune că două variabile sunt corelate dacă distribuția scorurilor uneia dintre acestea se schimbă sub influența scorurilor celeilalte.

Corelație negativă: corelație între două variabile caracterizată prin aceea că scoruri înalte ale unei variabile sunt asociate cu scoruri joase ale celeilalte variabile; altfel spus, într-o corelație negativă, creșterea valorii unei variabile este însoțită de descreșterea valorii celeilalte variabile.

Corelație pozitivă: corelație între două variabile caracterizată prin aceea că scoruri înalte ale unei variabile sunt asociate cu scoruri înalte ale celeilalte variabile, iar scoruri joase ale unei variabile sunt asociate cu scoruri joase ale celeilalte variabile; altfel spus, într-o corelație pozitivă, o variabilă crește sau descrește după cum crește sau descrește cealaltă variabilă.

Corelație liniară: corelație între două variabile de interval sau de raport caracterizată prin aceea că dispunerea punctelor în diagrama de împrăștiere poate fi aproximată printr-o linie dreaptă.

Corelație perfectă: corelația dintre două variabile caracterizată prin aceea că fiecare scor al unei variabile este asociat cu un singur scor al celeilalte variabile.

Diagrame de împrăștiere: modalități de prezentare vizuală a corelației dintre două variabile măsurate la nivel de interval sau de raport.

Ecuația de regresie bivariată: ecuație care descrie matematic o linie de regresie.

Linie de regresie: linie dreaptă care rezumă cel mai bine corelația dintre două variabile de interval sau de raport.

Mărimile corelației: mărimi statistice care permit cuantificarea importanței (tăriei) unei relații dintre variabile.

Metoda corelației multiple: tehnică multivariată de evidențiere a influențelor combinate ale tuturor variabilelor independente asupra variabilei dependente.

Metoda corelației parțiale: tehnică multivariată de evidențiere a influenței unei a treia (a patra etc.) variabile asupra unei corelații bivariate.

Metoda regresiei multiple: tehnică multivariată care permite izolarea influențelor separate ale mai multor variabile independente asupra variabilei dependente și astfel permite identificarea variabilei independente care are cea mai puternică influență asupra variabilei dependente.

Predicție: apreciere a scorurilor unei variabile pe baza cunoașterii scorurilor în privința altei variabile; o predicție este cu atât mai precisă cu cât corelația dintre cele două variabile este mai puternică.

BCU IAȘI/CENTRAL UNIVERSITARĂ

12. INTRODUCERE ELEMENTARĂ ÎN SPSS[1]

SPSS[2] este un program performant ce permite analize statistice şi managementul datelor înregistrate în sistem, utilizând, asemenea mediului Windows, o interfaţă grafică bazată pe căsuţe de dialog, pentru a facilita accesul acestora de către utilizatori. Structural, mediul SPSS se apropie ca formă de sistemele de gestionare a datelor de tip Acces, Excel etc., având însă particularităţi şi facilităţi distincte, pe care le vom evidenţia în continuare.

Principial, ferestrele active sub SPSS sunt de diverse forme, cuprinzând facilităţi legate de:

Data editor: permite afişarea în cadrul ferestrelor sale a conţinutului datelor stocate. Acest tip de fereastră se deschide în mod automat odată cu lansarea mediului SPSS, permiţând deopotrivă vizualizarea datelor existente, introducerea unora noi sau modificarea acestora.

Viewer: asigură în cadrul propriei ferestre vizualizarea tuturor categoriilor de rezultate, tabele şi diagrame obţinute în urma procesării datelor statistice. Fereastra de tip Viewer se deschide în mod automat de către program odată cu terminarea procesării datelor propuse spre analiză.

Draft viewer: acesstă categorie de fereastră este utilizată atunci când se doreşte tipărirea rezultatelor doar sub un format de text simplu, rezultat din tabelele pivot.

Pivot table editor: permite modificarea tabelelor pivot rezultate în urma procesării datelor prin intermediul facilităţilor de modificare a formei, culorii, fonturilor caracterelor, dispunerii acestora etc. în cadrul tabelelor pivot.

Chart editor: face parte din categoria ferestrelor interactive care permit modificarea rezoluţiei, culorilor, formei etc. graficelor rezultate în aplicaţia statistică.

Text output editor: este utilizat atunci când se doreşte prezentarea finală a datelor sub forma simplă de text, fără a prezenta însă structura rezultată din tabelele pivot. De asemenea, în cadrul acestei ferestre sunt activate facilităţile de modificare a formei, stilului, culorii şi mărimii caracterelor.

---

[1] Capitol elaborat de Sergiu Stan.

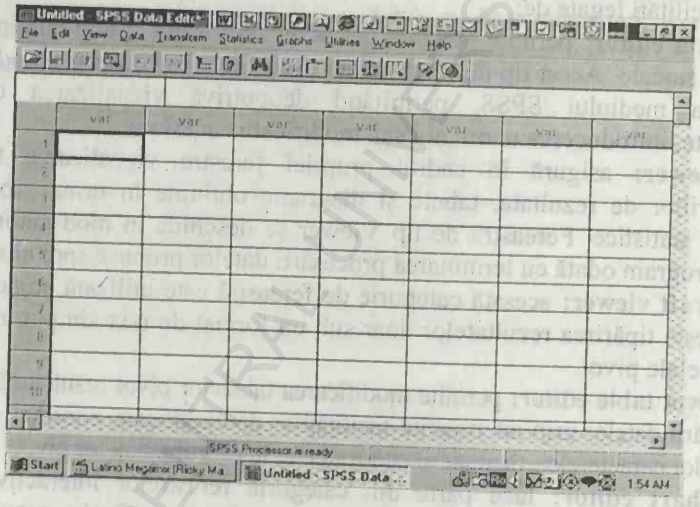
[2] Prescurtarea de la denumirea programului în limba engleză: *Statistical Package for the Social Sciences*.

Syntax editor: este o fereastră care se poate ataşa căsuţelor de dialog pentru verificarea sintaxei în cadrul textelor, împreună cu toate facilităţile aferente, atunci când utilizatorul doreşte acest lucru.

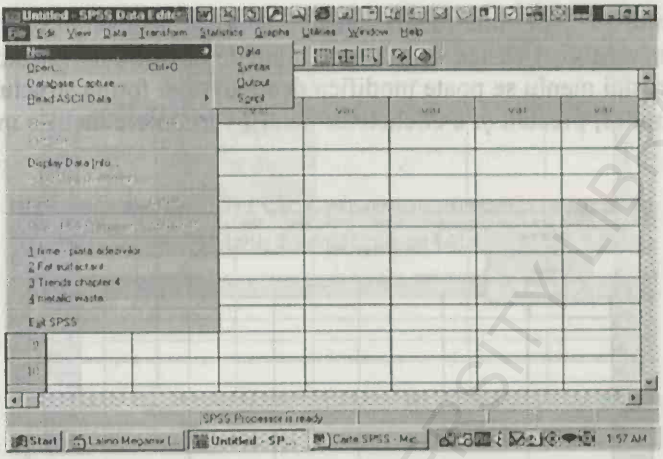
Script editor: reprezintă o facilitate acordată de către programul SPSS care permite crearea şi modificarea structurilor de gestionare a datelor existente cu ajutorul unui sistem de tip OLE.

Toate aceste ferestre pot fi apelate în mod succesiv de către utilizatorii programului SPSS, fără însă a avea şi facilitatea de a fi deschise toate în paralel (aşa cum se obişnuieşte deseori în cadrul mediului Windows).

La deschiderea unei noi aplicaţii în SPSS, fereastra de tip *Viewer* care se deschide utilizatorului prezintă următoarea formă:



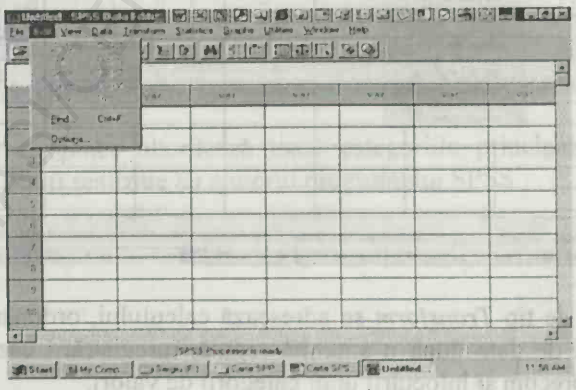
Odată cu lansarea în execuţie a programului se pot identifica căsuţe de dialog active de pe toolbar, acestea fiind *File*, *Edit*, *View*, *Data*, *Transform*, *Statistics*, *Graphics*, *Utilities*, *Windows* şi *Help*. La rândul lor, fiecare dintre aceste căsuţe de dialog prezintă o serie de facilităţi pe care le vom prezenta succint în continuare sub formă grafică, pentru a oferi cititorului o imagine concludentă asupra conţinutului acestora, fără să ne propunem aici prezentarea unui ghid de utilizare a programului SPSS. Astfel, căsuţa de dialog *File* prezintă următoarea structură:



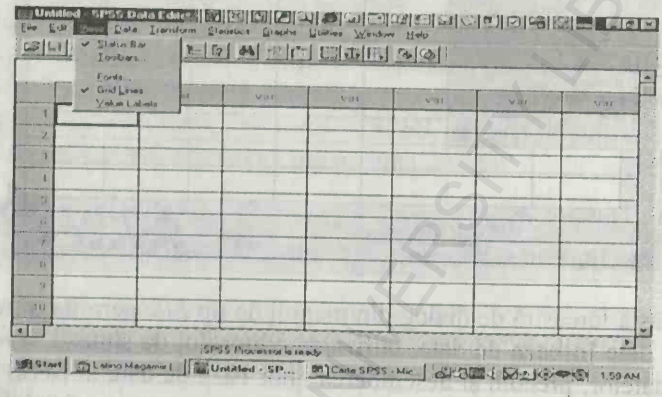
Această fereastră de dialog din meniul de tip *File* permite introducerea unor noi date în baza de date, utilizarea editorului de sintaxă, a formei de ieşire a datelor, precum şi deschiderea unor baze de date în SPSS realizate anterior pentru vizualizarea, modificarea sau exportarea datelor stocate. Fereastra ne permite, de asemenea, captarea unei baze de date, citirea datelor în cod ASCI, precum şi afişarea informaţiilor despre datele utilizate.

Asemenea mediului editor Windows, meniul *File* permite salvarea şi imprimarea fişierului ce conţine baza de date.

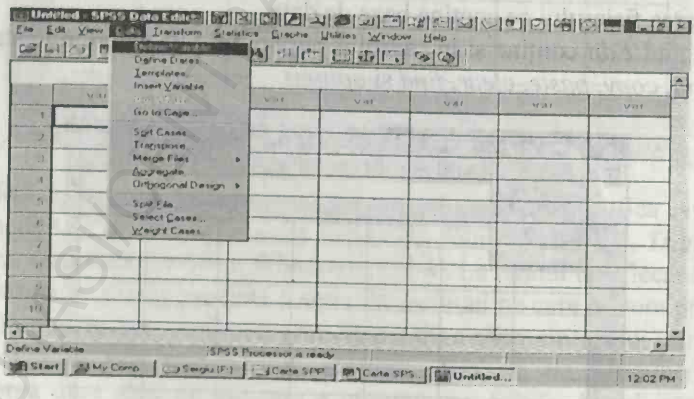
Meniul *Edit* conţine şi în cadrul programului SPSS opţiunile standard: *undo*, *cut*, *copy*, *paste*, *clear*, *find* şi *options*.



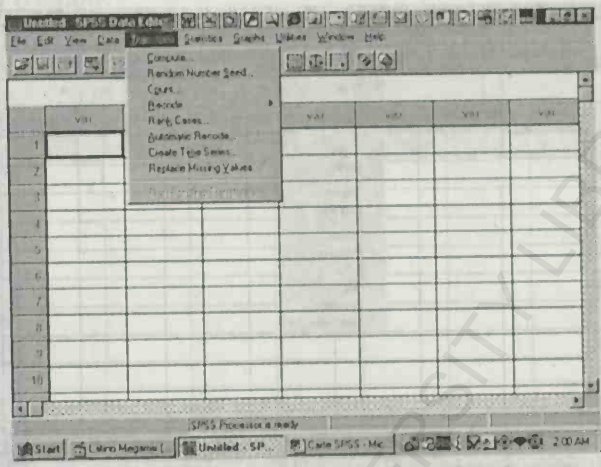
Meniul *View* permite modificarea structurii toolbar-ului, prin ataşarea sau excluderea unor căsuţe de dialog, în funcţie de dorinţa utilizatorului. În cadrul acestui meniu se poate modifica deopotrivă şi forma structurii de tip grilă a liniilor, precum şi a etichetelor pentru variabilele incluse în baza de date.



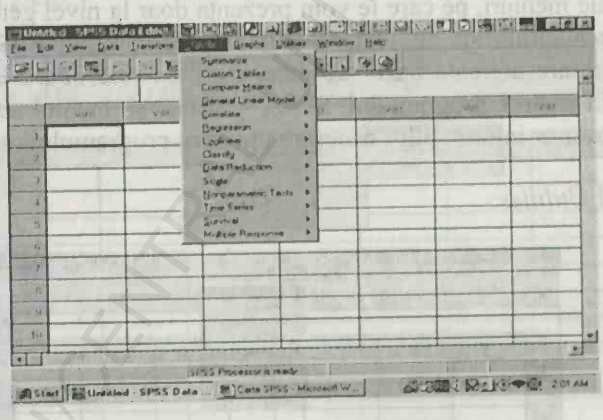
Meniul de tip *Data* cuprinde informaţii referitoare la definirea variabilelor, a datelor, având şi facilităţile de operare în cadrul bazei de date, aşa cum se poate observa în fereastra de mai jos:



Meniul de tip *Transform* se adresează calculului, ordonării datelor în cadrul bazei de date după o anumită regulă, înregistrării cazurilor de un anumit tip, precum şi înlocuirii unor categorii de valori.

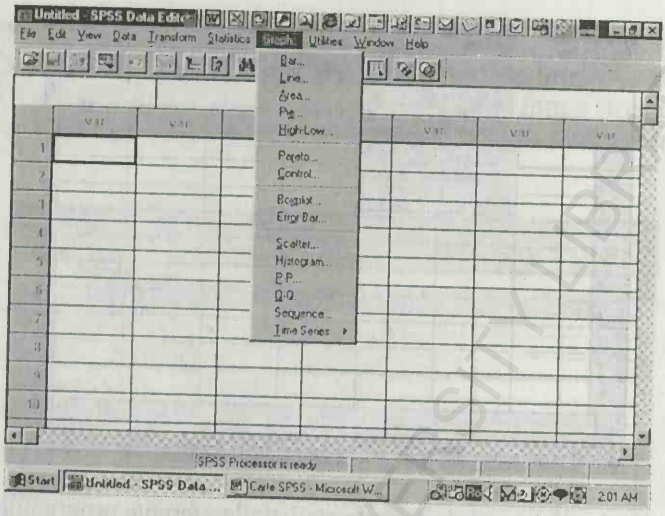


Meniul *Statistics* cuprinde toate statisticile aferente programului SPSS.



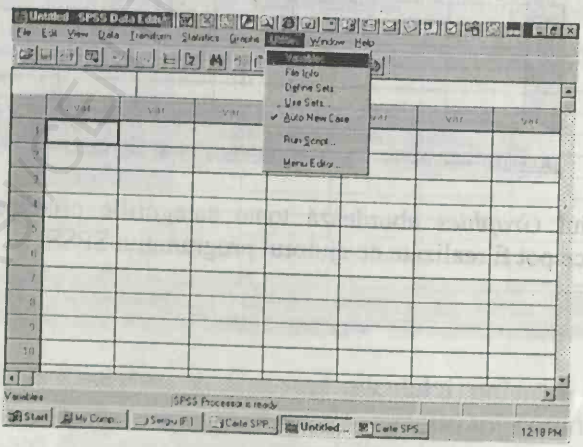
Meniul *Graphics* abordează toate categoriile principale de grafice statistice ce pot fi realizate cu ajutorul programului SPSS.

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

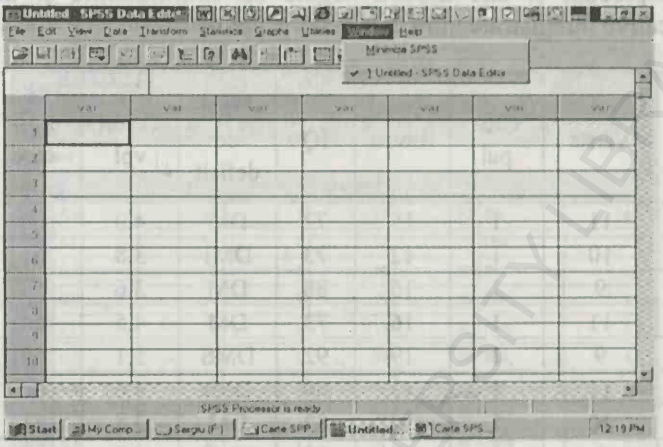


Ultimele meniuri, pe care le vom prezenta doar la nivel general pentru familiarizarea cititorilor cu toate facilitățile programului SPSS, cuprind facilități utilitare aferente bazei de date, facilități referitoare la lucrul cu ferestrele în cadrul programului SPSS, precum și meniul *Help* pentru furnizarea tuturor informațiilor necesare utilizării programului.

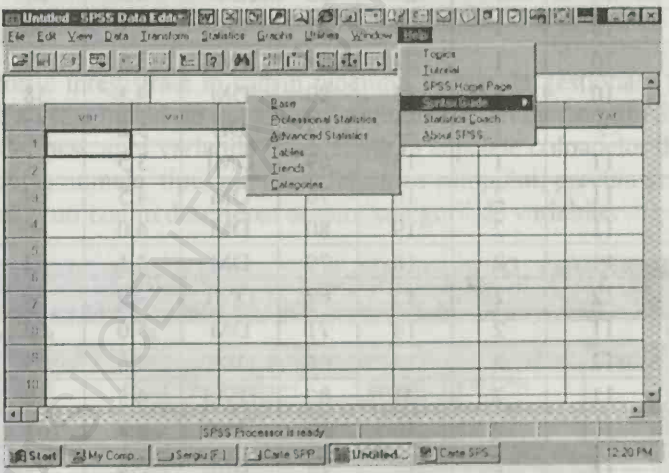
Meniul *Utilities*:



Meniul *Window*:



Meniul *Help*:

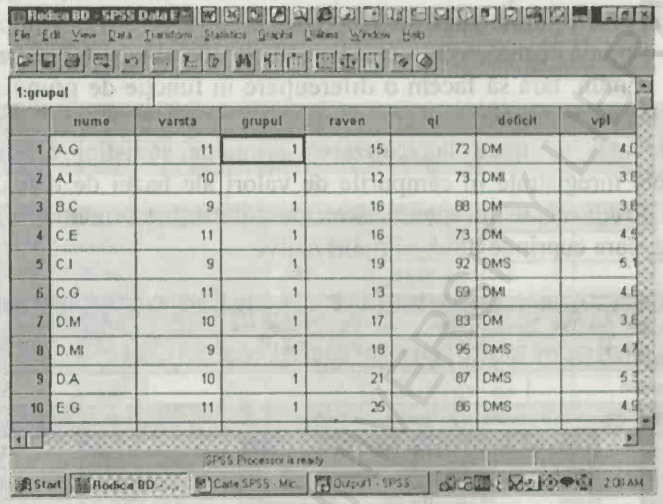


Pentru ilustrarea procesării datelor statistice, propunem următorul studiu de caz. 30 de subiecți, copii cu deficit intelectual având vârste cuprinse între 9 și 12 ani, au fost supuși unei testări psihologice complexe, constituite dintr-o baterie de teste de specialitate (Raven, Portage și vpl). Au fost împărțiți în două grupuri de lucru, fiecare dintre acestea fiind format din câte 15 subiecți, și au beneficiat de metode educaționale diferite.

În cadrul testării s-a dorit evidențierea eficienței uneia dintre cele două metode, precum și alte aspecte legate de similitudinile și diferențele semnificative înregistrate între cele două grupuri.

Nume subiect	Vârsta	Grupul	Raven	IQ	Tipul de deficit	Testul vpl	Testul Portage grup 1	Testul Portage grup 2
A.G	11	1	15	72	DM	4.0	60	84
A.I	10	1	12	73	DMI	3.8	61	83
B.C	9	1	16	88	DM	3.6	58	82
C.E	11	1	16	73	DM	4.5	64	81
C.I	9	1	19	92	DMS	5.1	65	82
C.G	11	1	13	69	DMI	4.6	60	89
D.M	10	1	17	83	DM	3.8	61	78
D.MI	9	1	18	95	DMS	4.7	59	79
D.A	10	1	21	87	DMS	5.3	64	86
E.G	11	1	25	86	DMS	4.9	61	80
G.F	10	1	23	92	DL	5.1	60	81
I.C	10	1	21	89	DMS	3.8	59	82
S.G	10	1	15	80	DM	4.1	58	83
V.I	9	1	22	97	DL	5.2	63	86
V.M	11	1	13	69	DMI	3.5	61	85
B.R.I	11	2	16	76	DM	4.5	64	65
C.A	11	2	19	80	DM	4.0	66	64
B.G.I	11	2	18	79	DM	4.1	63	62
B.A	12	2	13	67	DMI	4.9	64	65
E.C	11	2	14	71	DM	5.0	62	61
F.I.C	12	2	13	64	DMI	4.6	65	66
G.M	11	2	21	80	DMS	4.5	62	63
I.N	11	2	19	80	DM	4.4	61	60
I.A	11	2	15	74	DM	5.2	60	60
I.D	11	2	22	84	DMS	4.9	64	65
M.G.C	11	2	11	69	DMI	3.6	65	64
M.R.M	11	2	11	69	DMI	5.0	69	68
S.A	12	2	10	62	DMI	4.0	61	60
T.M	12	2	12	68	DMI	3.7	58	60
Z.M	12	2	12	68	DMI	5.1	64	63

Pentru a concluziona asupra acestei situații, se constituie baza de date în SPSS, care va avea următoarea formă:

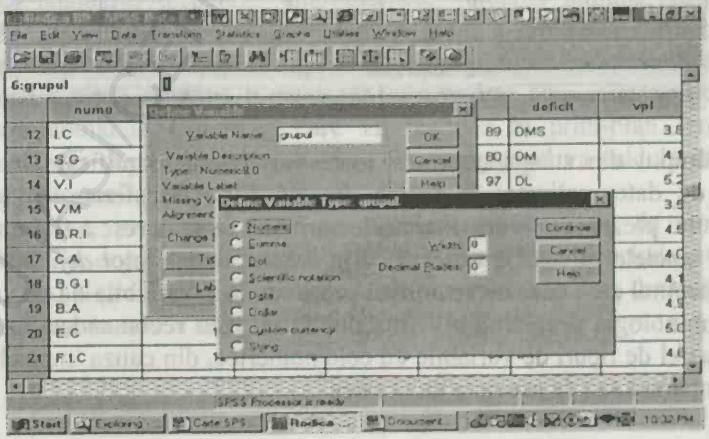


1:grupul

	numo	varsta	grupul	raven	qi	deficit	vpl
1	A.G	11	1	15	72	DM	4.0
2	A.I	10	1	12	73	DMI	3.6
3	B.C	9	1	16	88	DM	3.6
4	C.E	11	1	16	73	DM	4.9
5	C.I	9	1	19	92	DMS	5.1
6	C.G	11	1	13	69	DMI	4.6
7	D.M	10	1	17	83	DM	3.6
8	D.MI	9	1	18	96	DMS	4.7
9	D.A	10	1	21	87	DMS	5.1
10	E.G	11	1	25	86	DMS	4.9

Valorile înregistrate în cadrul tabelului primar de gestionare a datelor statistice au fost introduse în câmpurile aferente bazei de date din SPSS.

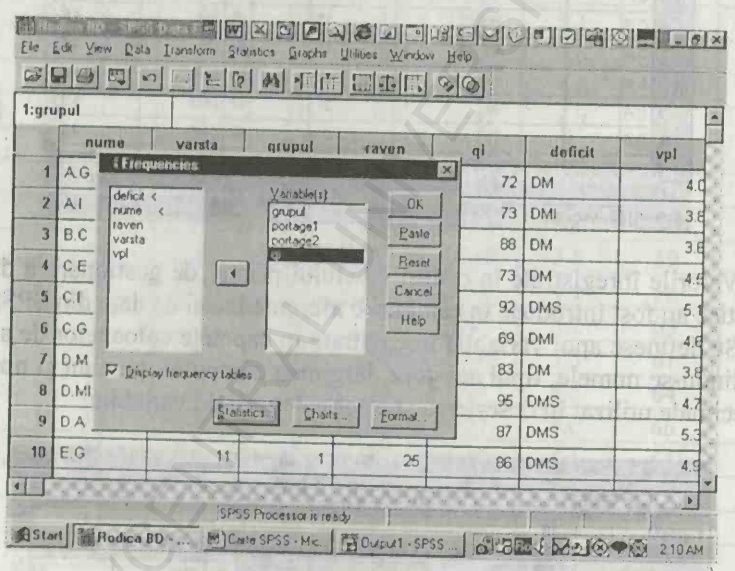
Se definesc apoi variabile înregistrate în capetele coloanelor de studiu, stabilindu-se numele, tipul acestora, lărgimea câmpului, precum și numărul de zecimale utilizat în descrierea acestor categorii de variabile.



De remarcat este faptul că programul prezintă facilități de exprimare a variabilelor atât sub formă numerică, cât și sub formă de cuvinte, acestea din urmă neintrând, însă, în calculul valorilor medii ale variabilelor, implicit în analizele statistice de structură.

Într-o primă analiză, vom considera că cei 30 subiecți fac parte dintr-un eșantion comun, fără să facem o diferențiere în funcție de grupul de lucru din care fac parte aceștia.

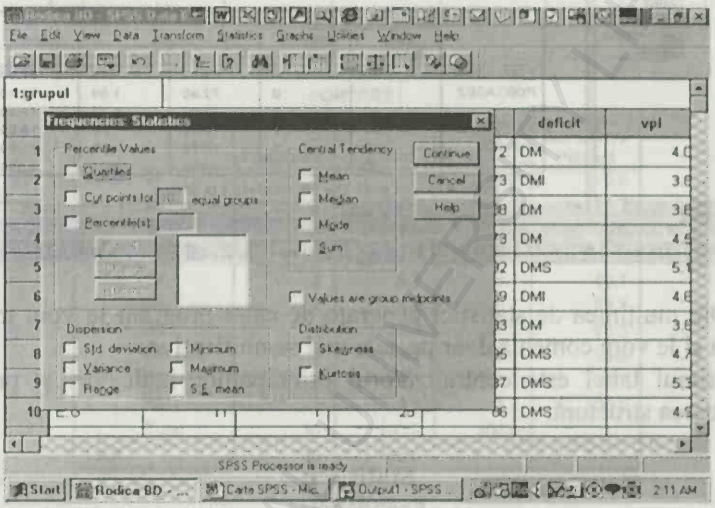
Mai întâi se trece la realizarea primelor statistici referitoare la frecvențele înregistrate în câmpurile de valori ale bazei de date. Apelând opțiunea *Frequencies* din meniul *Statistics*, se obține următoarea fereastră de dialog, care cuprinde două câmpuri active:



Câmpul din stânga cuprinde toate variabilele identificate în cadrul bazei de date realizate, în partea dreaptă fiind transferate cu ajutorul cursorului prezent în figură doar acele variabile ce se doresc a fi prezente în cadrul tabelelor pivot. Se observă că în dreptul variabilelor *deficit* și *nume* apare semnul „<", ceea ce semnifică prezența unor variabile de tip „string" (în terminologia programului). În general, nu este recomandată asocierea unor astfel de tipuri de variabile cu cele numerice, din cauza imposibilității de comparare sau de asociere cu acestea.

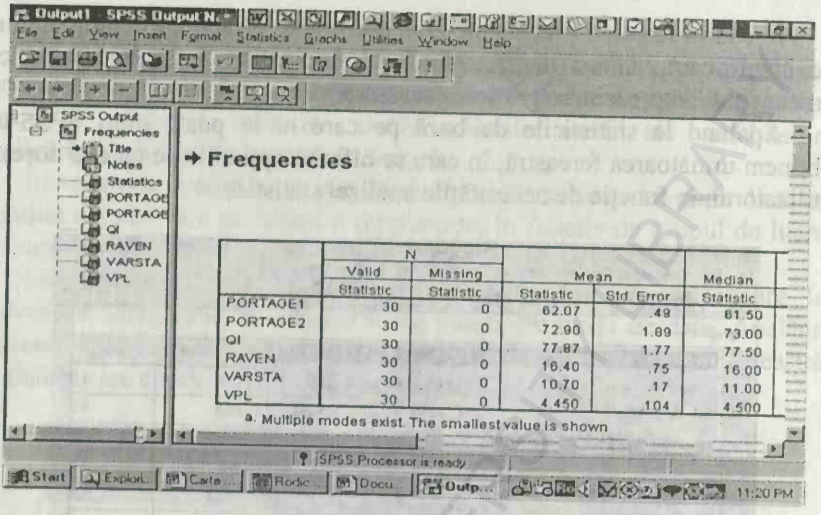
În cadrul ferestrei precedente erau prezentate şi facilităţile programului de identificare, alături de frecvenţe, a principalilor indicatori statistici, precum şi de reprezentare grafică a acestora.

Apelând la statisticile de bază pe care ni le poate oferi SPSS-ul, obţinem următoarea fereastră, în care se bifează opţiunile pe care le doreşte utilizatorul, în funcţie de necesităţile analizei statistice:



Se pot calcula valorile percentilelor, indicatorii tendinţei centrale (medie, mediană, mod, suma scorurilor înregistrate), indicatorii dispersiei (abaterea standard, dispersia, amplitudinea, valoarea minimă, respectiv maximă a distribuţiei de date), precum şi eroarea probabilă în raport cu determinarea mediei aritmetice ş.a. Bifând în câmpurile corespunzătoare indicatorii ce se doresc a fi evidenţiaţi în cadrul analizei statistice, se accesează comanda *Continue*, care va readuce în prim-plan fereastra precedentă, iar după lansarea comenzii *OK*, programul va calcula în mod automat indicatorii selectaţi.

La output, programul SPSS va furniza următorul tip de fereastră segmentată în două suprafeţe distincte: cea din stânga cuprinde numele tabelelor sau al graficelor generate de către program, în partea dreaptă fiind prezentate aceste tabele sau grafice sub formă propriu-zisă:



	N		Mean		Median
	Valid	Missing			
	Statistic	Statistic	Statistic	Std. Error	Statistic
PORTAOE1	30	0	62.07	.49	61.50
PORTAOE2	30	0	72.90	1.89	73.00
QI	30	0	77.87	1.77	77.50
RAVEN	30	0	16.40	.75	16.00
VARSTA	30	0	10.70	.17	11.00
VPL	30	0	4.450	.104	4.500

a. Multiple modes exist. The smallest value is shown

Din mulțimea de statistici generate de către program le vom trece în revistă și le vom comenta doar pe cele mai semnificative.

Primul tabel este centralizatorul principalilor indicatori și prezintă următoarea structură:

Statistici:
Frequencies

Statistics

	N		Mean		Median	Mode	Std. Deviation	Variance	Range	Minimum	Maximum	Sum	Percentiles		
	Valid	Missing											25.00	50.00	75.00
	Statistic	Statistic	Statistic	Std. Error	Statistic	Statistic	Statistic	Statistic	Statistic	Statistic	Statistic	Statistic	Statistic	Statistic	Statistic
PORTAO	30	0	62.07	.49	61.50	61[a]	2.66	7.10	11	58	69	1862	60.00	61.50	64.00
PORTAO	30	0	72.90	1.89	73.00	60	10.35	107.20	29	60	89	2187	63.00	73.00	82.25
QI	30	0	77.87	1.77	77.50	69[a]	9.72	94.40	35	62	97	2336	69.00	77.50	86.25
RAVEN	30	0	16.40	.75	16.00	13	4.09	16.73	15	10	25	492	13.00	16.00	19.50
VARSTA	30	0	10.70	.17	11.00	11	.92	.84	3	9	12	321	10.00	11.00	11.00
VPL	30	0	4.450	.104	4.500	3.8[a]	.572	.327	1.8	3.5	5.3	133.5	3.950	4.500	5.000

a. Multiple modes exist. The smallest value is shown

În prima coloană sunt prezentate frecvențele valide luate în calcul de către program, în cea de-a doua fiind identificate eventualele frecvențe lipsă, drept urmare a neexistenței unei valori într-un câmp al bazei de date. Într-un astfel de context, se sugerează utilizatorilor verificarea acestei coloane și introducerea valorilor lipsă în câmpurile aferente, în sensul obținerii unei statistici de acuratețe deosebită. În continuare, programul identifică frecvențele de apariție a variabilelor numerice (scorurile

înregistrate în cadrul testului Portage în cadrul grupelor 1 şi 2 înainte şi după aplicarea strategiilor educaţionale).

GRUPUL

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	1	15	50.0	50.0	50.0
	2	15	50.0	50.0	100.0
	Total	30	100.0	100.0	
Total		30	100.0		

PORTAGE1

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	58	3	10.0	10.0	10.0
	59	2	6.7	6.7	16.7
	60	4	13.3	13.3	30.0
	61	6	20.0	20.0	50.0
	62	2	6.7	6.7	56.7
	63	2	6.7	6.7	63.3
	64	6	20.0	20.0	83.3
	65	3	10.0	10.0	93.3
	66	1	3.3	3.3	96.7
	69	1	3.3	3.3	100.0
	Total	30	100.0	100.0	
Total		30	100.0		

PORTAGE2

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	60	4	13.3	13.3	13.3
	61	1	3.3	3.3	16.7
	62	1	3.3	3.3	20.0
	63	2	6.7	6.7	26.7
	64	2	6.7	6.7	33.3
	65	3	10.0	10.0	43.3
	66	1	3.3	3.3	46.7
	68	1	3.3	3.3	50.0
	78	1	3.3	3.3	53.3
	79	1	3.3	3.3	56.7
	80	1	3.3	3.3	60.0
	81	2	6.7	6.7	66.7
	82	3	10.0	10.0	76.7
	83	2	6.7	6.7	83.3
	84	1	3.3	3.3	86.7
	85	1	3.3	3.3	90.0
	86	2	6.7	6.7	96.7
	89	1	3.3	3.3	100.0
	Total	30	100.0	100.0	
Total		30	100.0		

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Tabelele de mai sus prezintă cel mai simplu mod de definire a variabilelor, fără a fi necesară o relație de condiționare suplimentară. Dacă această condiționare este totuși necesară în cadrul investigației, atunci se poate apela la o formă mai complexă de prezentare a frecvențelor, în speță la frecvențele de tip *explore* (selectate prin comenzile *statistics – frequencies – explore*).

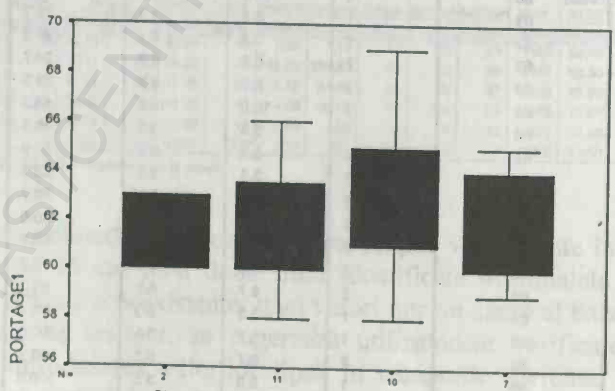
Să considerăm, de exemplu, variabila dependentă *grad de deficit mintal* al fiecăruia dintre subiecți; obținem următoarea situație:

Deficit

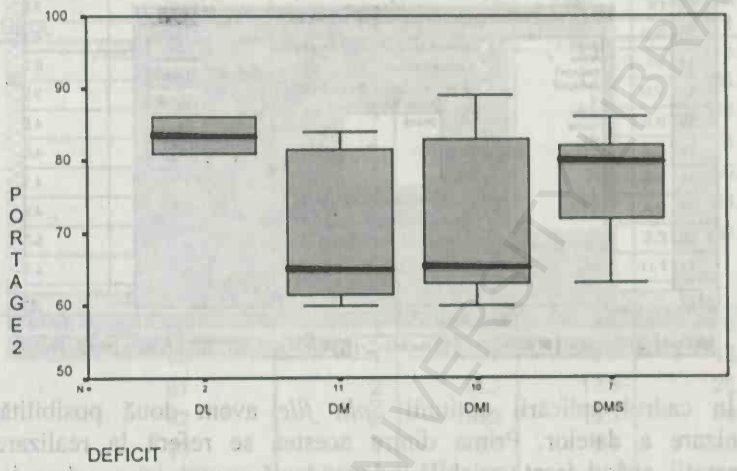
Case Processing Summary

		Cases					
		Valid		Missing		Total	
	DEFICIT	N	Percent	N	Percent	N	Percent
PORTAGE1	DL	2	100.0%	0	.0%	2	100.0%
	DM	11	100.0%	0	.0%	11	100.0%
	DMI	10	100.0%	0	.0%	10	100.0%
	DMS	7	100.0%	0	.0%	7	100.0%
PORTAGE2	DL	2	100.0%	0	.0%	2	100.0%
	DM	11	100.0%	0	.0%	11	100.0%
	DMI	10	100.0%	0	.0%	10	100.0%
	DMS	7	100.0%	0	.0%	7	100.0%

Pentru testul Portage aplicat înainte de diferențierea strategiilor educaționale se obține următoarea evoluție a valorilor înregistrate de către subiecți în funcție de tipul de deficit:

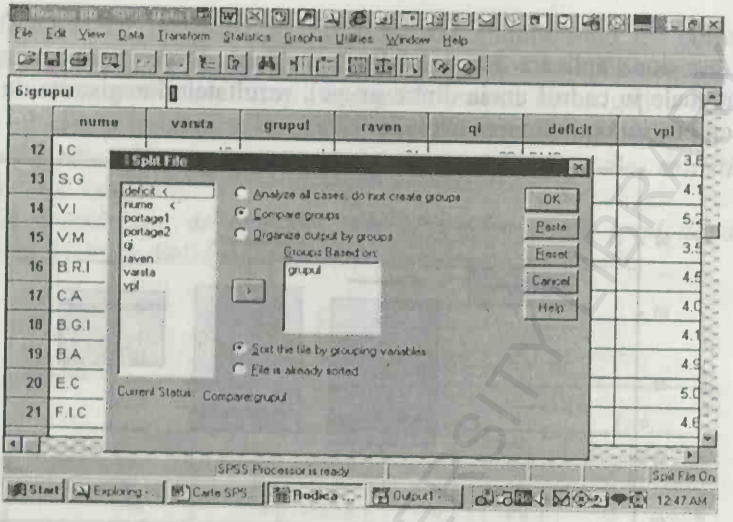


La a doua aplicare a testului Portage (după diferenţierea strategiilor educaţionale în cadrul uneia dintre grupe), rezultatele înregistrate de către subiecţi prezintă următoarea evoluţie:



Până acum am considerat evoluţia întregului eşantion format din cei 30 de subiecţi la cele două aplicări ale testului Portage, fără a realiza nici un fel de diferenţă între aceştia (dacă fac parte din primul sau din al doilea grup de lucru). Dacă se doreşte a se observa evoluţia în paralel a performanţelor înregistrate în cadrul fiecăruia dintre cele două grupuri la aplicarea succesivă a testului Portage (înainte şi după diferenţierea strategiilor educaţionale), este necesară utilizarea funcţiei *Split file* din meniul *Data*.

BCU IASI CENTRU UNIVERSITAR LIBRARY



În cadrul aplicării opțiunii *Split file* avem două posibilități de organizare a datelor. Prima dintre acestea se referă la realizarea de comparații, având drept variabilă independentă grupul, iar cea de-a doua ne va oferi posibilitatea de a evidenția în mod separat performanțele înregistrate la nivel individual de fiecare grup în parte. Alegând opțiunea de a compara, de exemplu, rezultatele obținute de către subiecți la aplicarea pentru prima dată a testului Portage, obținem următoarea situație:

BCU IASI/CENTRU UNIVERSITAR

PORTAGE 1

Frequency Table

GRUPUL			Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
1	Valid	58	2	13.3	13.3	13.3
		59	2	13.3	13.3	26.7
		60	3	20.0	20.0	46.7
		61	4	26.7	26.7	73.3
		63	1	6.7	6.7	80.0
		64	2	13.3	13.3	93.3
		65	1	6.7	6.7	100.0
		Total	15	100.0	100.0	
	Total		15	100.0		
2	Valid	58	1	6.7	6.7	6.7
		60	1	6.7	6.7	13.3
		61	2	13.3	13.3	26.7
		62	2	13.3	13.3	40.0
		63	1	6.7	6.7	46.7
		64	4	26.7	26.7	73.3
		65	2	13.3	13.3	86.7
		66	1	6.7	6.7	93.3
		69	1	6.7	6.7	100.0
		Total	15	100.0	100.0	
	Total		15	100.0		

Evident, în mod analog se obține un tabel care prezintă evoluția rezultatelor subiecților la cea de-a doua aplicare a testului Portage.

Până acum nu am realizat decât o evidențiere a scorurilor, fără a putea preciza dacă există similitudini sau diferențe semnificative între rezultatele înregistrate. Pentru a evidenția similitudinile în aplicarea celor două teste, vom folosi funcțiile de corelație liniare și nonliniare, pentru a putea stabili gradul de legătură dintre variabile.

Aplicând testul de corelație Pearson pentru eșantionul format din cei 30 de subiecți, obținem următoarea situație:

Correlations

		PORTAGE1	PORTAGE2
Pearson Correlation	PORTAGE1	1.000	-.296
	PORTAGE2	-.296	1.000
Sig. (2-tailed)	PORTAGE1	.	.112
	PORTAGE2	.112	.
N	PORTAGE1	30	30
	PORTAGE2	30	30

Tabelul ne indică o corelație slabă între variabile, aceasta întâlnindu-se doar în 11,2% din totalul de cazuri. Coeficientul de corelație negativ (-296) arată o ușoară relație de dependență inversă (creșterea valorilor unui set de variabile se realizează în concordanță cu descreșterea valorilor pentru cel de-al doilea tip de variabile).

Apelând la metodele nonparametrice de corelație, se calculează în mod analog coeficienții τ-b al lui Kendall respectiv coeficientul ρ al lui Spearman.

Nonparametric Correlations

Correlations

			PORTAGE1	PORTAGE2
Kendall's tau_b	Correlation Coefficient	PORTAGE1	1.000	-.077
		PORTAGE2	-.077	1.000
	Sig. (2-tailed)	PORTAGE1	.	.574
		PORTAGE2	.574	.
	N	PORTAGE1	30	30
		PORTAGE2	30	30
Spearman's rho	Correlation Coefficient	PORTAGE1	1.000	-.162
		PORTAGE2	-.162	1.000
	Sig. (2-tailed)	PORTAGE1	.	.391
		PORTAGE2	.391	.
	N	PORTAGE1	30	30
		PORTAGE2	30	30

Dacă vom dori să analizăm corelația variabilelor după grupul de lucru, apelând ca în cadrul exemplelor de mai sus la funcția *Split file*, vom obține următoarele situații:

Correlations

GRUPUL			PORTAGE1	PORTAGE2
1	Pearson Correlation	PORTAGE1	1.000	.143
		PORTAGE2	.143	1.000
	Sig. (2-tailed)	PORTAGE1	.	.612
		PORTAGE2	.612	.
	N	PORTAGE1	15	15
		PORTAGE2	15	15
2	Pearson Correlation	PORTAGE1	1.000	.897**
		PORTAGE2	.897**	1.000
	Sig. (2-tailed)	PORTAGE1	.	.000
		PORTAGE2	.000	.
	N	PORTAGE1	15	15
		PORTAGE2	15	15

**. Correlation is significant at the 0.01 level (2-tailed)

Dacă pentru grupul 1 nu se înregistrează corelații semnificative între prima aplicare și cea de-a doua aplicare a testului Portage, în cadrul grupului numărul 2 se observă corelații înalt semnificative (în valoare absolută .000; cu alte cuvinte, sunt practic 0% șanse să ne putem înșela în predicția conform căreia nu s-ar înregistra diferențe semnificative). Acest lucru se observă și din valoarea deosebit de ridicată a coeficientului Pearson 897 (având în vedere faptul că 1 este cea mai ridicată valoare ce se poate înregistra).

Aceste corelații semnificative în cadrul grupului numărul 2 se pot observa și în cadrul testelor nonparametrice.

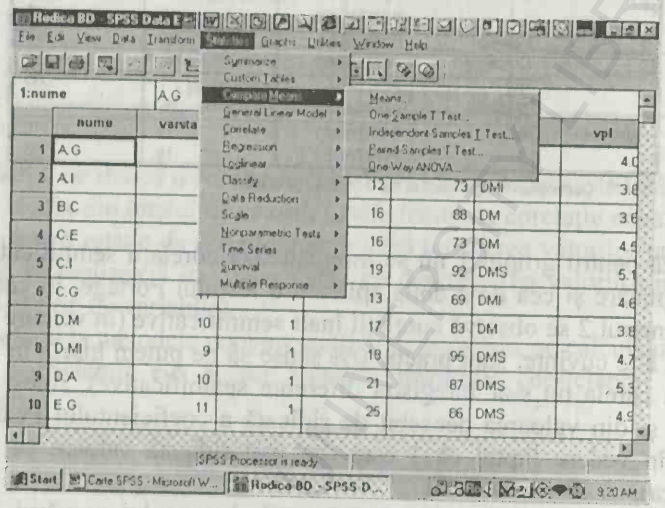
Correlations

GRUPUL				PORTAGE1	PORTAGE2
1	Kendall's tau_b	Correlation Coefficient	PORTAGE1	1.000	.094
			PORTAGE2	.094	1.000
		Sig. (2-tailed)	PORTAGE1	.	.647
			PORTAGE2	.647	.
		N	PORTAGE1	15	15
			PORTAGE2	15	15
	Spearman's rho	Correlation Coefficient	PORTAGE1	1.000	.115
			PORTAGE2	.115	1.000
		Sig. (2-tailed)	PORTAGE1	.	.683
			PORTAGE2	.683	.
		N	PORTAGE1	15	15
			PORTAGE2	15	15
2	Kendall's tau_b	Correlation Coefficient	PORTAGE1	1.000	.768**
			PORTAGE2	.768**	1.000
		Sig. (2-tailed)	PORTAGE1	.	.000
			PORTAGE2	.000	.
		N	PORTAGE1	15	15
			PORTAGE2	15	15
	Spearman's rho	Correlation Coefficient	PORTAGE1	1.000	.883**
			PORTAGE2	.883**	1.000
		Sig. (2-tailed)	PORTAGE1	.	.000
			PORTAGE2	.000	.
		N	PORTAGE1	15	15
			PORTAGE2	15	15

**. Correlation is significant at the .01 level (2-tailed).

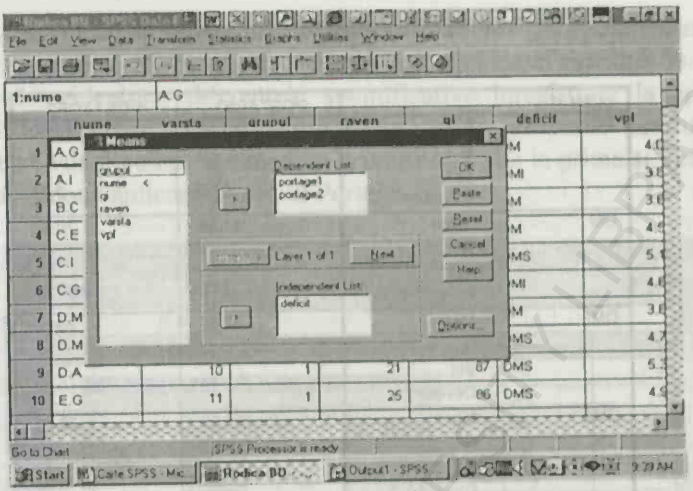
BCU IAȘI CENTRALĂ UNIVERSITARĂ

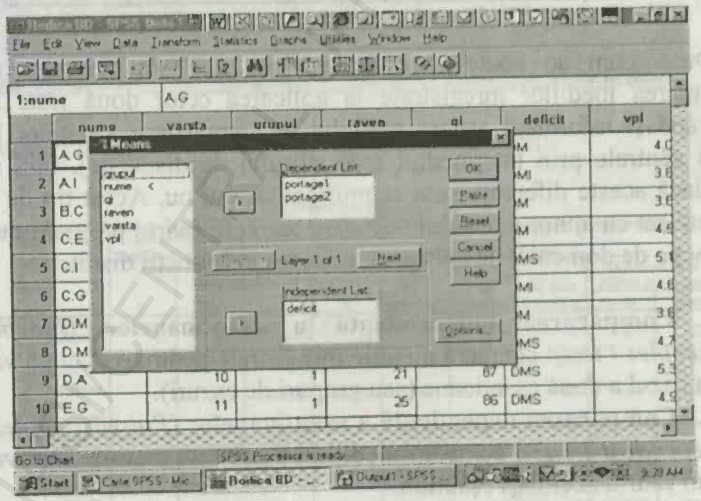
În cadrul programului SPSS, o modalitate de testare a diferențelor semnificative dintre mediile a două eşantioane se realizează prin intermediul testului de semnificație cunoscut în terminologia de specialitate sub numele *t-Student*. Aşa cum se poate observa şi în fereastra următoare, există mai multe modalități de testare a diferențelor semnificative:



Prima dintre facilitățile operaționale puse la dispoziție de program se referă la aplicația *Compare Means – Means*, prima dintre cele întâlnite în cadrul barei de derulare a meniului *Statistics*. Acest tip de test este utilizat atunci când se doreşte evidențierea mediilor înregistrate de către două eşantioane distincte în funcție de o variabilă independentă predefinită.

În exemplul următor, ne propunem să evidențiem mediile înregistrate în cadrul colectivității formate din cei 30 de subiecți la aplicarea testului Portage, având drept variabilă independentă gradul de deficit mintal al subiecților. Pentru a putea realiza o astfel de analiză, programul ne propune drept interfață următoarea fereastră de dialog, în care se observă clar posibilitățile de alegere a variabilelor dependentă şi independentă, în funcție de preferințele de analiză ale utilizatorului.





În urma selectării variabilelor dependentă şi independentă, SPSS-ul va prezenta în partea rezervată prezentării rezultatelor următorul raport:

Means

Report

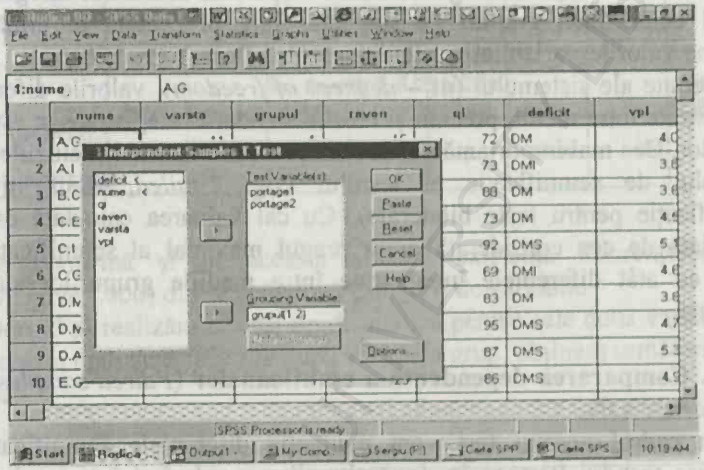
DEFICIT		PORTAGE1	PORTAGE2
DL	Mean	61.50	83.50
	N	2	2
	Std. Deviation	2.12	3.54
DM	Mean	61.55	70.91
	N	11	11
	Std. Deviation	2.54	10.44
DMI	Mean	62.80	70.30
	N	10	10
	Std. Deviation	3.19	10.98
DMS	Mean	62.00	76.71
	N	7	7
	Std. Deviation	2.45	8.98
Total	Mean	62.07	72.90
	N	30	30
	Std. Deviation	2.66	10.35

După cum se poate observa, această facilitate ne permite doar evidențierea mediilor înregistrate la aplicarea celor două teste Portage (generând și informații asupra gradului de împrăștiere a datelor în jurul valorii centrale prin intermediul indicatorului de dispersie), fără a putea testa dacă aceste diferențe sunt semnificative sau nu. Acest tip de analiză este realizat cu ajutorul testului *t-Student*, care, în cadrul programului SPSS (în funcție de domeniul de aplicare), prezintă trei funcții distincte:

1. **Compararea independentă a eșantioanelor** (*Independent-samples t test*): compară mediile înregistrate pentru o singură variabilă în cazul a două eșantioane (sau grupuri de cazuri).
2. **Compararea dependentă a eșantioanelor** (*Paired-samples t test-dependent t test*): compară mediile înregistrate pentru două variabile din cadrul aceluiași eșantion.
3. **Compararea valorii pentru un eșantion:** compară media pentru o variabilă înregistrată la nivel experimental cu o medie teoretică.

În continuare, vom efectua analiza diferențelor semnificative pentru toate cele trei situații distincte, în cadrul exemplului prezentat anterior.

1. Compararea independentă a eşantioanelor (*Independent-samples t test*). Aşa cum este prezentat şi în cadrul următoarei ferestre de dialog, dorim să evidenţiem diferenţele semnificative înregistrate la aplicarea succesivă a testelor Portage pentru fiecare dintre grupurile de studiu. În acest sens, vor fi comparate mediile grupurilor 1 şi 2 la prima şi, respectiv, la cea de-a doua aplicare a testului Portage.



În urma procesării datelor, obţinem următorul tabel:

Independent Samples Test

		Levene's Test for Equality of Variances		t-test for Equality of Means					
								95% Confidence Interval of the Mean	
		F	Sig.	t	df	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	Std. Error Difference	Lower	Upper
PORTAGE1	Equal variances assumed	.493	.488	-2.539	28	.017	-2.27	.89	-4.10	-.44
	Equal variances not assumed			-2.539	26.923	.017	-2.27	.89	-4.10	-.43
PORTAGE2	Equal variances assumed	.096	.756	19.767	28	.000	19.67	.99	17.63	21.70
	Equal variances not assumed			19.767	27.429	.000	19.67	.99	17.63	21.71

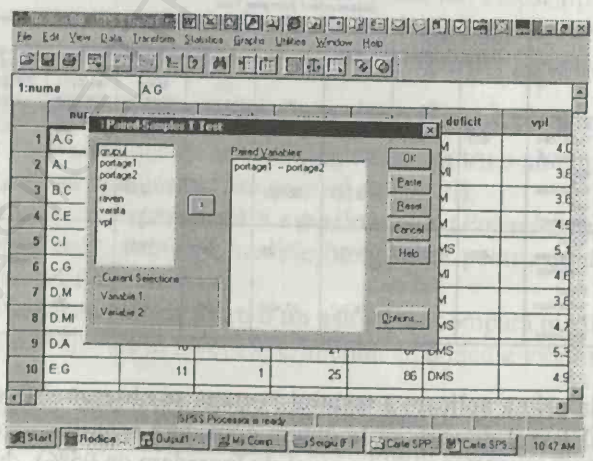
Dacă la prima aplicare a testului Portage se observă diferenţe valorice între grupul 1 şi 2 pe care nu le putem considera semnificative (nivelul de semnificaţie este .017 pentru un nivel de încredere de 95%), după aplicarea

strategiilor educaționale se observă diferențe valorice înalt semnificative (nivelul de semnificație este maxim, .000, pentru un nivel de încredere de 95%). Această analiză statistică ne poate conduce la concluzia că strategiile educaționale aplicate au avut un succes real pentru grupul ce a beneficiat de o astfel de aplicație.

De notat că în primele coloane tabelul prezintă testul Levene pentru verificarea diferențelor înregistrate între dispersiile scorurilor înregistrate în cadrul celor două grupuri de subiecți. Sunt prezentate în următoarele coloane valorile variabilei *t* calculate pentru fiecare grup în parte, gradele de libertate ale sistemului (df – *degrees of freedom*), valorile diferențelor înregistrate între medii, precum și erorile standard înregistrate în estimarea mediilor. Cea mai importantă coloană a tabelului conține concluziile asupra nivelului de semnificație al testului (sig. *2-tailed*, adică nivel de semnificație pentru teste bilaterale). Cu cât valoarea calculată este mai apropiată de cea considerată drept pragul maximal al semnificativității, .000, cu atât diferențele înregistrate între mediile grupurilor sunt mai evidente.

2. Compararea dependentă a eșantioanelor (*Paired-samples t test-dependent t test*).

În cadrul acestui test vom evidenția diferențele semnificative la aplicarea testului Portage în două situații: considerând într-o primă fază eșantionul de 30 de subiecți, urmând apoi, cu ajutorul funcției *split file*, să realizăm o analiză după scorurile înregistrate în cadrul grupurilor.



În prima situație, programul va considera că există un singur eșantion și că cele două variabile sunt scorurile înregistrate la testele Portage 1, respectiv Portage 2, pe care le compară între ele. Rezultatele obținute sunt prezentate în cadrul următorului tabel:

Paired Samples Test

	Paired Differences					t	df	Sig. (2-tailed)
	Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean	95% Confidence Interval of the Differen Lower	Upper			
Pair 1 PORTAGE - PORTAGE	-10.83	11.43	2.09	-15.10	-6.57	-5.192	29	.000

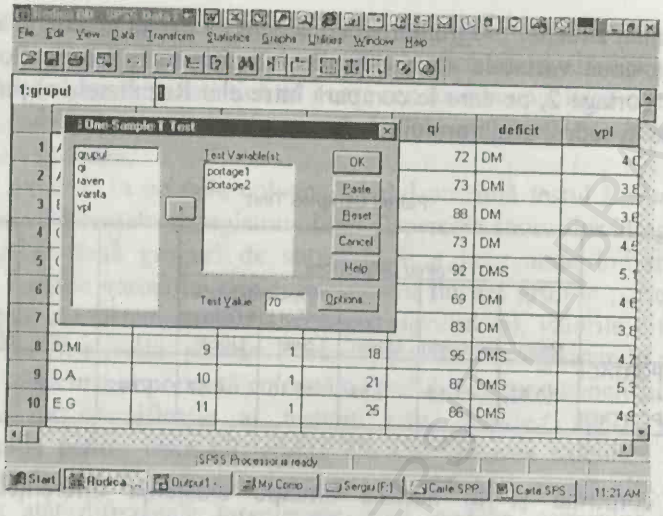
Se confirmă și în această situație existența diferențelor înalt semnificative (.000) dintre cele două categorii de variabile.

Dorind să realizăm același tip de analiză pentru cele două variabile, de data aceasta realizând *split file* după variabila grup, obținem următorul tabel de date:

Paired Samples Test

GRUPUL			Paired Differences					t	df	Sig. (2-tailed)
			Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean	95% Confidence Interval of the Difference Lower	Upper			
1	Pair 1	PORTAGE1 - PORTAGE2	-21.80	3.38	.87	-23.67	-19.93	-24.944	14	.000
2	Pair 1	PORTAGE1 - PORTAGE2	.13	1.19	.31	-.52	.79	.435	14	.670

3. Compararea valorii pentru un eșantion este utilizată în situația în care considerăm o medie teoretică postulată pentru testul Portage și dorim să comparăm această valoare cu valorile experimentale pe care le cunoaștem deja din analizele anterioare.



După cum se poate observa și din fereastra prezentată, se alege valoarea teoretică de 70 de puncte pe scala aferentă testului respectiv.

Rezultatele obținute în urma procesării datelor statistice sunt prezentate în următoarele tabele:

One-Sample Statistics

	N	Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean
PORTAGE1	30	62.07	2.66	.49
PORTAGE2	30	72.90	10.35	1.89

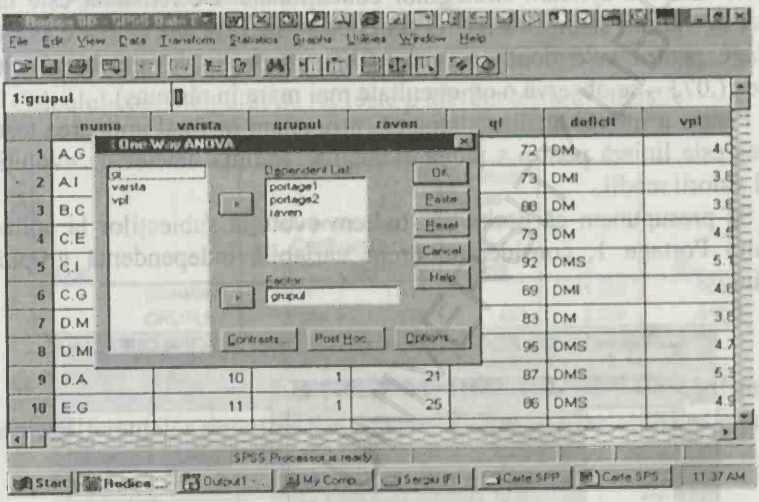
One-Sample Test

	Test Value = 70					
	t	df	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	95% Confidence Interval of the Difference	
					Lower	Upper
PORTAGE1	-16.309	29	.000	-7.93	-8.93	-6.94
PORTAGE2	1.534	29	.136	2.90	-.97	6.77

Dacă la prima aplicare a testului Portage diferențele înregistrate erau considerate semnificative în raport cu media propusă (62.07 puncte experimentale în raport cu cele 70 propuse teoretic), la a doua aplicare a testului Portage, după aplicarea strategiilor educaționale, media de punctaj a

subiecților a ajuns la 72.9 puncte (depășind ușor și media postulată teoretic), ceea ce concluzionează asupra validității metodelor aplicate.

Pentru analiza diferențelor semnificative înregistrate între mediile a cel puțin 3 eșantioane sau a comparării a cel puțin 3 categorii de variabile distincte este utilizat testul ANOVA.



Presupunând că dorim să realizăm o identificare a diferențelor semnificative dintre scorurile înregistrate de către subiecți la cele două teste Portage și testul Raven, având drept factor variabila *grup*, obținem următoarea situație prezentată în tabel.

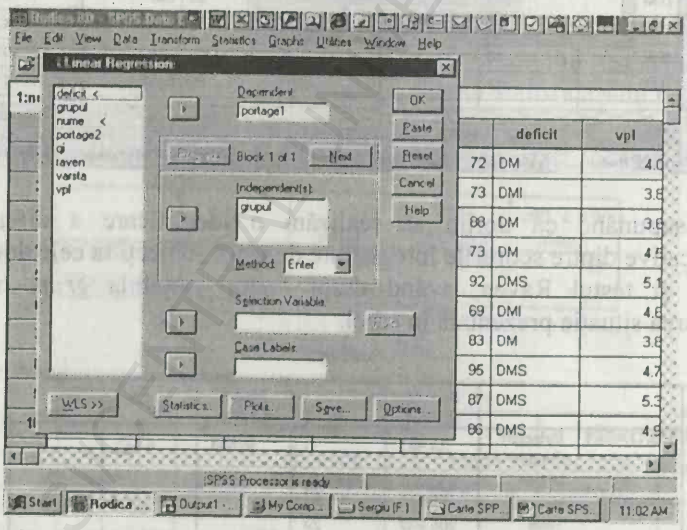
ANOVA

		Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
PORTAGE1	Between Groups	38.533	1	38.533	6.448	.017
	Within Groups	167.333	28	5.976		
	Total	205.867	29			
PORTAGE2	Between Groups	2900.833	1	2900.833	390.747	.000
	Within Groups	207.867	28	7.424		
	Total	3108.700	29			
RAVEN	Between Groups	53.333	1	53.333	3.458	.073
	Within Groups	431.867	28	15.424		
	Total	485.200	29			

Calculul coeficientului F (al lui Fischer) ne arată că diferențele înalt semnificative .000 între variațiile intra-grupuri respectiv între grupuri se observă doar la a doua aplicare a testului Portage pentru grupurile 1 și 2. Aceste variații mari ale scorurilor se traduc prin creșterea performanțelor școlare în urma aplicării strategiilor educaționale. De remarcat este faptul că aceste variații semnificative nu sunt observate la prima aplicare a testului Portage pentru cele două grupuri (.017), respectiv la aplicarea testului Raven (.073 – se observă o omogenitate mai mare în răspuns).

Pentru a întregi analiza statistică, propunem în final aplicarea testului de regresie liniară pentru a putea evidenția tendința datelor de evoluție în jurul valorii medii.

Să presupunem că dorim să studiem evoluția subiecților la aplicarea testului Portage 1, considerând drept variabilă independentă grupul de studiu.



Rezultatele obținute în urma procesării datelor statistice prezintă următoarea formă:

ANOVA[b]

Model		Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
1	Regression	38.533	1	38.533	6.448	.017[a]
	Residual	167.333	28	5.976		
	Total	205.867	29			

a. Predictors: (Constant), GRUPUL

b. Dependent Variable: PORTAGE1

Calculul coeficientului de regresie β aferent testului statistic:

Coefficients[a]

Model		Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients	t	Sig.
		B	Std. Error	Beta		
1	(Constant)	58.667	1.411		41.566	.000
	GRUPUL	2.267	.893	.433	2.539	.017

a. Dependent Variable: PORTAGE1

Pentru aplicarea testului Portage 1 se poate constata confirmarea apariției diferențelor semnificative, ca și în cadrul analizelor precedente.

BCU IASI/CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

BCU IASI/CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

ANEXA A: Tabelul ariilor de sub curba normală standard

Z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916

Z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990

BCU IASI/CENTRAL UNIVERSITY

ANEXA B: Tabel cu numere aleatorii

23439 98507 39910 00560 32626 10389
54824 39825 41255 92292 42792 47044
08887 53462 27061 91124 00821 06739
36009 71613 59290 39307 81382 90065
11579 11866 23982 07184 48754 23730
15999 56909 63526 58442 65018 67216
35313 52502 20542 18161 08148 26274
71145 26478 57657 11259 23742 11130
01182 28841 63925 16987 45450 03024
24830 31913 92697 21464 76223 23050
70884 74438 63139 82700 80136 36995
23337 72693 56751 81454 87637 01545
72052 57078 62448 61957 47327 05131
63423 11919 81135 83185 79771 41291
13656 52075 72073 26395 87275 94669
28626 61547 71322 52318 44211 28168
36633 53025 00751 31951 17705 61394
40782 34030 43905 17686 64397 78999
32394 54527 45417 33384 57129 67003
93098 65060 34922 40062 07794 17866
98858 50208 54784 60012 48871 54379
77549 62988 98074 41326 09232 64635
31945 03282 24239 08562 22750 77805
25794 76169 01099 89443 00105 67125
97664 42607 74723 80536 20475 25996
90630 94635 10350 70824 90228 92753
05436 67370 23925 76439 08397 56952
19443 07008 27445 53390 37941 87853
79331 76925 44953 66790 90254 18858
00257 34057 77220 04875 93336 87945
54361 17404 21565 36900 84171 85462
92070 50459 46044 34841 41336 26351
94727 96386 47109 45193 81429 84494
07690 67800 72675 89012 68124 76345
32697 68932 49115 25655 12619 76233
76121 77280 02446 27539 46418 29301
10608 44906 63248 92769 42805 52649
95058 32147 46498 45746 69184 05758
38957 40597 88611 77664 47704 05859
67899 32902 27651 23971 38938 97347
14012 19793 01114 18777 82517 05695
00527 78748 12807 54566 71503 99322
11332 54185 24077 77453 21435 03715
94285 92230 50249 10439 74547 09974
97543 98153 31736 29688 20015 71747
61713 55274 83118 74813 22444 62979
40175 48507 97218 35700 52395 59131
51847 02577 84295 70263 75988 35299
82095 40603 53662 63581 35416 11192

91330 69915 50002 26539 22932 20736
71847 36502 81114 02923 10504 70523
36032 32799 20687 27313 29781 32904
08226 44723 52397 03984 24294 04990
70778 92734 43057 30797 82349 45916
07374 31187 09229 43326 49142 78238
58853 72101 81042 26493 49890 01389
25607 76309 26440 01548 28838 37129
87902 16117 47038 56639 87867 63608
03474 36702 64729 56504 29729 37936
37350 90069 78692 26169 57320 43231
15997 55786 12577 20265 79432 07787
70801 39564 70527 20008 70947 48602
66266 37262 62280 49922 48858 70309
59906 10852 82541 05267 05912 18046
67885 80107 75293 32814 72990 05873
27153 82956 58071 42062 76281 57111
15980 08517 92262 21835 35423 71902
72707 31535 93345 47664 95990 76161
05922 44245 70777 67070 92129 67925
63912 72108 84799 34600 51273 40910

BCU IASI/CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

ANEXA C: Tabelul valorilor critice ale distribuției *t*

df\α	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005	0.0005
1	3.077684	6.313752	12.70620	31.82052	63.65674	636.6192
2	1.885618	2.919986	4.30265	6.96456	9.92484	31.5991
3	1.637744	2.353363	3.18245	4.54070	5.84091	12.9240
4	1.533206	2.131847	2.77645	3.74695	4.60409	8.6103
5	1.475884	2.015048	2.57058	3.36493	4.03214	6.8688
6	1.439756	1.943180	2.44691	3.14267	3.70743	5.9588
7	1.414924	1.894579	2.36462	2.99795	3.49948	5.4079
8	1.396815	1.859548	2.30600	2.89646	3.35539	5.0413
9	1.383029	1.833113	2.26216	2.82144	3.24984	4.7809
10	1.372184	1.812461	2.22814	2.76377	3.16927	4.5869
11	1.363430	1.795885	2.20099	2.71808	3.10581	4.4370
12	1.356217	1.782288	2.17881	2.68100	3.05454	4.3178
13	1.350171	1.770933	2.16037	2.65031	3.01228	4.2208
14	1.345030	1.761310	2.14479	2.62449	2.97684	4.1405
15	1.340606	1.753050	2.13145	2.60248	2.94671	4.0728
16	1.336757	1.745884	2.11991	2.58349	2.92078	4.0150
17	1.333379	1.739607	2.10982	2.56693	2.89823	3.9651
18	1.330391	1.734064	2.10092	2.55238	2.87844	3.9216
19	1.327728	1.729133	2.09302	2.53948	2.86093	3.8834
20	1.325341	1.724718	2.08596	2.52798	2.84534	3.8495
21	1.323188	1.720743	2.07961	2.51765	2.83136	3.8193
22	1.321237	1.717144	2.07387	2.50832	2.81876	3.7921
23	1.319460	1.713872	2.06866	2.49987	2.80734	3.7676
24	1.317836	1.710882	2.06390	2.49216	2.79694	3.7454
25	1.316345	1.708141	2.05954	2.48511	2.78744	3.7251
26	1.314972	1.705618	2.05553	2.47863	2.77871	3.7066
27	1.313703	1.703288	2.05183	2.47266	2.77068	3.6896
28	1.312527	1.701131	2.04841	2.46714	2.76326	3.6739
29	1.311434	1.699127	2.04523	2.46202	2.75639	3.6594
30	1.310415	1.697261	2.04227	2.45726	2.75000	3.6460
inf	1.281552	1.644854	1.95996	2.32635	2.57583	3.2905

BCU IAȘI

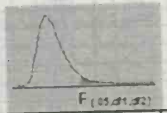
ANEXA D: Tabelul valorilor critice ale distribuției F

$\alpha = 0.10$

gl2/gl1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	203	24	30	40	60	120	INF
1	39.86346	49.50000	53.59324	55.83296	57.24008	58.20442	58.90595	59.43898	59.85759	60.19498	60.70521	61.22034	61.74029	62.00205	62.26497	62.52905	62.79428	63.06064	63.32812
2	8.52632	9.00000	9.16179	9.24342	9.29263	9.32553	9.34908	9.36677	9.38054	9.39157	9.40813	9.42471	9.44131	9.44962	9.45793	9.46624	9.47456	9.48289	9.49122
3	5.53832	5.46238	5.39077	5.34264	5.30916	5.28473	5.26619	5.25167	5.24000	5.23041	5.21562	5.20031	5.18448	5.17636	5.16811	5.15972	5.15119	5.14251	5.13370
4	4.54477	4.32456	4.19086	4.10725	4.05058	4.00975	3.97897	3.95494	3.93567	3.91988	3.89553	3.87036	3.84434	3.83099	3.81742	3.80361	3.78957	3.77527	3.76073
5	4.06042	3.77972	3.61948	3.52020	3.45298	3.40451	3.36790	3.33928	3.31628	3.29740	3.26824	3.23801	3.20665	3.19052	3.17408	3.15732	3.14023	3.12279	3.10500
6	3.77595	3.46330	3.28876	3.18076	3.10751	3.05455	3.01446	2.98304	2.95774	2.93693	2.90472	2.87122	2.83634	2.81834	2.79996	2.78117	2.76195	2.74229	2.72216
7	3.58943	3.25744	3.07407	2.96053	2.88334	2.82739	2.78493	2.75158	2.72468	2.70251	2.66811	2.63223	2.59473	2.57533	2.55546	2.53510	2.51422	2.49279	2.47079
8	3.45792	3.11312	2.92380	2.80643	2.72645	2.66833	2.62413	2.58935	2.56124	2.53804	2.50196	2.46422	2.42464	2.40410	2.38302	2.36136	2.33910	2.31618	2.29257
9	3.36030	3.00645	2.81286	2.69268	2.61061	2.55086	2.50531	2.46941	2.44034	2.41632	2.37888	2.33962	2.29832	2.27683	2.25472	2.23196	2.20849	2.18427	2.15923
10	3.28502	2.92447	2.72767	2.60534	2.52164	2.46058	2.41397	2.37715	2.34731	2.32260	2.28405	2.24351	2.20074	2.17843	2.15543	2.13169	2.10716	2.08176	2.05542
11	3.22520	2.85951	2.66023	2.53619	2.45118	2.38907	2.34157	2.30400	2.27350	2.24823	2.20873	2.16709	2.12305	2.10001	2.07621	2.05161	2.02612	1.99965	1.97211
12	3.17655	2.80680	2.60552	2.48010	2.39402	2.33102	2.28278	2.24457	2.21352	2.18776	2.14744	2.10485	2.05968	2.03599	2.01149	1.98610	1.95973	1.93228	1.90361
13	3.13621	2.76317	2.56027	2.43371	2.34672	2.28298	2.23410	2.19535	2.16382	2.13763	2.09659	2.05316	2.00698	1.98272	1.95757	1.93147	1.90429	1.87591	1.84620
14	3.10221	2.72647	2.52222	2.39469	2.30694	2.24256	2.19313	2.15390	2.12195	2.09540	2.05371	2.00953	1.96245	1.93766	1.91193	1.88516	1.85723	1.82800	1.79728
15	3.07319	2.69517	2.48979	2.36143	2.27302	2.20808	2.15818	2.11853	2.08621	2.05932	2.01707	1.97222	1.92431	1.89904	1.87277	1.84539	1.81676	1.78672	1.75505
16	3.04811	2.66817	2.46181	2.33274	2.24376	2.17833	2.12800	2.08798	2.05533	2.02815	1.98539	1.93992	1.89127	1.86556	1.83879	1.81084	1.78156	1.75075	1.71817
17	3.02623	2.64464	2.43743	2.30775	2.21825	2.15239	2.10169	2.06134	2.02839	2.00094	1.95772	1.91169	1.86236	1.83624	1.80901	1.78053	1.75063	1.71909	1.68564
18	3.00698	2.62395	2.41601	2.28577	2.19583	2.12958	2.07854	2.03789	2.00467	1.97698	1.93334	1.88681	1.83685	1.81035	1.78269	1.75371	1.72322	1.69099	1.65671
19	2.98990	2.60561	2.39702	2.26630	2.17596	2.10936	2.05802	2.01710	1.98364	1.95573	1.91170	1.86471	1.81416	1.78731	1.75924	1.72979	1.69876	1.66587	1.63077
20	2.97465	2.58925	2.38009	2.24893	2.15823	2.09132	2.03970	1.99853	1.96485	1.93674	1.89236	1.84494	1.79384	1.76667	1.73822	1.70833	1.67678	1.64326	1.60738
21	2.96096	2.57457	2.36489	2.23334	2.14231	2.07512	2.02325	1.98186	1.94797	1.91967	1.87497	1.82715	1.77555	1.74807	1.71927	1.68896	1.65691	1.62278	1.58615
22	2.94858	2.56131	2.35117	2.21927	2.12794	2.06050	2.00840	1.96680	1.93273	1.90425	1.85925	1.81106	1.75899	1.73122	1.70208	1.67138	1.63885	1.60415	1.56678
23	2.93736	2.54929	2.33873	2.20651	2.11491	2.04723	1.99492	1.95312	1.91888	1.89025	1.84497	1.79643	1.74392	1.71588	1.68643	1.65535	1.62237	1.58711	1.54903
24	2.92712	2.53833	2.32739	2.19488	2.10303	2.03513	1.98263	1.94066	1.90625	1.87748	1.83194	1.78308	1.73015	1.70185	1.67210	1.64067	1.60726	1.57146	1.53270
25	2.91774	2.52831	2.31702	2.18424	2.09216	2.02406	1.97138	1.92925	1.89469	1.86578	1.82000	1.77083	1.71752	1.68898	1.65895	1.62718	1.59335	1.55703	1.51760
26	2.90913	2.51910	2.30749	2.17447	2.08218	2.01389	1.96104	1.91876	1.88407	1.85503	1.80902	1.75957	1.70589	1.67712	1.64682	1.61472	1.58050	1.54368	1.50360
27	2.90119	2.51061	2.29871	2.16546	2.07298	2.00452	1.95151	1.90909	1.87427	1.84511	1.79889	1.74917	1.69514	1.66616	1.63560	1.60320	1.56859	1.53129	1.49057
28	2.89385	2.50276	2.29060	2.15714	2.06447	1.99585	1.94270	1.90014	1.86520	1.83593	1.78951	1.73954	1.68519	1.65600	1.62519	1.59250	1.55753	1.51976	1.47841
29	2.88703	2.49548	2.28307	2.14941	2.05658	1.98781	1.93452	1.89184	1.85679	1.82741	1.78081	1.73060	1.67593	1.64655	1.61551	1.58253	1.54721	1.50899	1.46704
30	2.88069	2.48872	2.27607	2.14223	2.04925	1.98033	1.92692	1.88412	1.84896	1.81949	1.77270	1.72227	1.66731	1.63774	1.60648	1.57323	1.53757	1.49891	1.45636
40	2.83535	2.44037	2.22609	2.09095	1.99682	1.92688	1.87252	1.82886	1.79290	1.76269	1.71456	1.66241	1.60515	1.57411	1.54108	1.50562	1.46716	1.42476	1.37691
60	2.79107	2.39325	2.17741	2.04099	1.94571	1.87472	1.81939	1.77483	1.73802	1.70701	1.65743	1.60337	1.54349	1.51072	1.47554	1.43734	1.39520	1.34757	1.29146
120	2.74781	2.34734	2.12999	1.99230	1.89587	1.82381	1.76748	1.72196	1.68425	1.65238	1.60120	1.54500	1.48207	1.44723	1.40938	1.36760	1.32034	1.26457	1.19256
inf	2.70554	2.30259	2.08380	1.94486	1.84727	1.77411	1.71672	1.67020	1.63152	1.59872	1.54578	1.48714	1.42060	1.38318	1.34187	1.29513	1.23995	1.16860	1.00000

BCU IASI

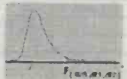
$\alpha = 0.05$



df2/df1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	INF
1	161.4476	199.5000	215.7073	224.5832	230.1619	233.9860	236.7684	238.8827	240.5433	241.8817	243.9060	245.9499	248.0131	249.0518	250.0951	251.1432	252.1957	253.2529	254.3144
2	18.5128	19.0000	19.1643	19.2468	19.2964	19.3295	19.3532	19.3710	19.3848	19.3959	19.4125	19.4291	19.4458	19.4541	19.4624	19.4707	19.4791	19.4874	19.4957
3	10.1280	9.5521	9.2766	9.1172	9.0135	8.9406	8.8867	8.8452	8.8123	8.7855	8.7446	8.7029	8.6602	8.6385	8.6166	8.5944	8.5720	8.5494	8.5264
4	7.7086	6.9443	6.5914	6.3882	6.2561	6.1631	6.0942	6.0410	5.9988	5.9644	5.9117	5.8578	5.8025	5.7744	5.7459	5.7170	5.6877	5.6581	5.6281
5	6.6079	5.7861	5.4095	5.1922	5.0503	4.9503	4.8759	4.8183	4.7725	4.7351	4.6777	4.6188	4.5581	4.5272	4.4957	4.4638	4.4314	4.3985	4.3650
6	5.9874	5.1433	4.7571	4.5337	4.3874	4.2839	4.2067	4.1468	4.0990	4.0600	3.9999	3.9381	3.8742	3.8415	3.8082	3.7743	3.7398	3.7047	3.6689
7	5.5914	4.7374	4.3468	4.1203	3.9715	3.8660	3.7870	3.7257	3.6767	3.6365	3.5747	3.5107	3.4445	3.4105	3.3758	3.3404	3.3043	3.2674	3.2298
8	5.3177	4.4590	4.0662	3.8379	3.6875	3.5806	3.5005	3.4381	3.3881	3.3472	3.2839	3.2184	3.1503	3.1152	3.0794	3.0428	3.0053	2.9669	2.9276
9	5.1174	4.2565	3.8625	3.6331	3.4817	3.3738	3.2927	3.2296	3.1789	3.1373	3.0729	3.0061	2.9365	2.9005	2.8637	2.8259	2.7872	2.7475	2.7067
10	4.9646	4.1028	3.7083	3.4780	3.3258	3.2172	3.1355	3.0717	3.0204	2.9782	2.9130	2.8450	2.7740	2.7372	2.6996	2.6609	2.6211	2.5801	2.5379
11	4.8443	3.9823	3.5874	3.3567	3.2039	3.0946	3.0123	2.9480	2.8962	2.8536	2.7876	2.7186	2.6464	2.6090	2.5705	2.5309	2.4901	2.4480	2.4045
12	4.7472	3.8853	3.4903	3.2592	3.1059	2.9961	2.9134	2.8486	2.7964	2.7534	2.6866	2.6169	2.5436	2.5055	2.4663	2.4259	2.3842	2.3410	2.2962
13	4.6672	3.8056	3.4105	3.1791	3.0254	2.9153	2.8321	2.7669	2.7144	2.6710	2.6037	2.5331	2.4589	2.4202	2.3803	2.3392	2.2966	2.2524	2.2064
14	4.6001	3.7389	3.3439	3.1122	2.9582	2.8477	2.7642	2.6987	2.6458	2.6022	2.5342	2.4630	2.3879	2.3487	2.3082	2.2664	2.2229	2.1778	2.1307
15	4.5431	3.6823	3.2874	3.0556	2.9013	2.7905	2.7066	2.6408	2.5876	2.5437	2.4753	2.4034	2.3275	2.2878	2.2468	2.2043	2.1601	2.1141	2.0658
16	4.4940	3.6337	3.2389	3.0069	2.8524	2.7413	2.6572	2.5911	2.5377	2.4935	2.4247	2.3522	2.2756	2.2354	2.1938	2.1507	2.1058	2.0589	2.0096
17	4.4513	3.5915	3.1968	2.9647	2.8100	2.6987	2.6143	2.5480	2.4943	2.4499	2.3807	2.3077	2.2304	2.1898	2.1477	2.1040	2.0584	2.0107	1.9604
18	4.4139	3.5546	3.1599	2.9277	2.7729	2.6613	2.5767	2.5102	2.4563	2.4117	2.3421	2.2686	2.1906	2.1497	2.1071	2.0629	2.0166	1.9681	1.9168
19	4.3807	3.5219	3.1274	2.8951	2.7401	2.6283	2.5435	2.4768	2.4227	2.3779	2.3080	2.2341	2.1555	2.1141	2.0712	2.0264	1.9795	1.9302	1.8780
20	4.3512	3.4928	3.0984	2.8661	2.7109	2.5990	2.5140	2.4471	2.3928	2.3479	2.2776	2.2033	2.1242	2.0825	2.0391	1.9938	1.9464	1.8963	1.8432
21	4.3248	3.4668	3.0725	2.8401	2.6848	2.5727	2.4876	2.4205	2.3660	2.3210	2.2504	2.1757	2.0960	2.0540	2.0102	1.9645	1.9165	1.8657	1.8117
22	4.3009	3.4434	3.0491	2.8167	2.6613	2.5491	2.4638	2.3965	2.3419	2.2967	2.2258	2.1508	2.0707	2.0283	1.9842	1.9380	1.8894	1.8380	1.7831
23	4.2793	3.4221	3.0280	2.7955	2.6400	2.5277	2.4422	2.3748	2.3201	2.2747	2.2036	2.1282	2.0476	2.0050	1.9605	1.9139	1.8648	1.8128	1.7570
24	4.2597	3.4028	3.0088	2.7763	2.6207	2.5082	2.4226	2.3551	2.3002	2.2547	2.1834	2.1077	2.0267	1.9838	1.9390	1.8920	1.8424	1.7896	1.7330
25	4.2417	3.3852	2.9912	2.7587	2.6030	2.4904	2.4047	2.3371	2.2821	2.2365	2.1649	2.0889	2.0075	1.9643	1.9192	1.8718	1.8217	1.7684	1.7110
26	4.2252	3.3690	2.9752	2.7426	2.5868	2.4741	2.3883	2.3205	2.2655	2.2197	2.1479	2.0716	1.9898	1.9464	1.9010	1.8533	1.8027	1.7488	1.6906
27	4.2100	3.3541	2.9604	2.7278	2.5719	2.4591	2.3732	2.3053	2.2501	2.2043	2.1323	2.0558	1.9736	1.9299	1.8842	1.8361	1.7851	1.7306	1.6717
28	4.1960	3.3404	2.9467	2.7141	2.5581	2.4453	2.3593	2.2913	2.2360	2.1900	2.1179	2.0411	1.9586	1.9147	1.8687	1.8203	1.7689	1.7138	1.6541
29	4.1830	3.3277	2.9340	2.7014	2.5454	2.4324	2.3461	2.2783	2.2229	2.1768	2.1045	2.0275	1.9446	1.9005	1.8543	1.8055	1.7537	1.6981	1.6376
30	4.1709	3.3158	2.9223	2.6896	2.5336	2.4205	2.3343	2.2662	2.2107	2.1646	2.0921	2.0148	1.9317	1.8874	1.8409	1.7918	1.7396	1.6835	1.6223
40	4.0847	3.2317	2.8387	2.6060	2.4495	2.3359	2.2490	2.1802	2.1240	2.0772	2.0035	1.9245	1.8389	1.7929	1.7444	1.6928	1.6373	1.5766	1.5089
60	4.0012	3.1504	2.7581	2.5252	2.3683	2.2541	2.1665	2.0970	2.0401	1.9926	1.9174	1.8364	1.7480	1.7001	1.6491	1.5943	1.5343	1.4673	1.3893
120	3.9201	3.0718	2.6802	2.4472	2.2899	2.1750	2.0868	2.0164	1.9588	1.9105	1.8337	1.7505	1.6587	1.6084	1.5543	1.4952	1.4290	1.3519	1.2539
inf	3.8415	2.9957	2.6049	2.3719	2.2141	2.0986	2.0096	1.9384	1.8799	1.8307	1.7522	1.6664	1.5705	1.5173	1.4591	1.3940	1.3180	1.2214	1.0000

BCU IAȘI

$\alpha = 0.025$

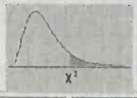


gl2/ gl1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	INF
1	647.7890	799.5000	864.1630	899.5833	921.8479	937.1111	948.2169	956.6562	963.2846	968.6274	976.7079	984.8668	993.1028	997.2492	1001.414	1005.598	1009.800	1014.020	1018.258
2	38.5063	39.0000	39.1655	39.2484	39.2982	39.3315	39.3552	39.3730	39.3869	39.3980	39.4146	39.4313	39.4479	39.4562	39.465	39.473	39.481	39.490	39.498
3	17.4434	16.0441	15.4392	15.1010	14.8848	14.7347	14.6244	14.5399	14.4731	14.4189	14.3366	14.2527	14.1674	14.1241	14.081	14.037	13.992	13.947	13.902
4	12.2179	10.6491	9.9792	9.6045	9.3645	9.1973	9.0741	8.9796	8.9047	8.8439	8.7512	8.6565	8.5599	8.5109	8.461	8.411	8.360	8.309	8.257
5	10.0070	8.4336	7.7636	7.3879	7.1464	6.9777	6.8531	6.7572	6.6811	6.6192	6.5245	6.4277	6.3286	6.2780	6.227	6.175	6.123	6.069	6.015
6	8.8131	7.2599	6.5988	6.2272	5.9876	5.8198	5.6955	5.5996	5.5234	5.4613	5.3662	5.2687	5.1684	5.1172	5.065	5.012	4.959	4.904	4.849
7	8.0727	6.5415	5.8898	5.5226	5.2852	5.1186	4.9949	4.8993	4.8232	4.7611	4.6658	4.5678	4.4667	4.4150	4.362	4.309	4.254	4.199	4.142
8	7.5709	6.0595	5.4160	5.0526	4.8173	4.6517	4.5286	4.4333	4.3572	4.2951	4.1997	4.1012	3.9995	3.9472	3.894	3.840	3.784	3.728	3.670
9	7.2093	5.7147	5.0781	4.7181	4.4844	4.3197	4.1970	4.1020	4.0260	3.9639	3.8682	3.7694	3.6669	3.6142	3.560	3.505	3.449	3.392	3.333
10	6.9367	5.4564	4.8256	4.4683	4.2361	4.0721	3.9498	3.8549	3.7790	3.7168	3.6209	3.5217	3.4185	3.3654	3.311	3.255	3.198	3.140	3.080
11	6.7241	5.2559	4.6300	4.2751	4.0440	3.8807	3.7586	3.6638	3.5879	3.5257	3.4296	3.3299	3.2261	3.1725	3.118	3.061	3.004	2.944	2.883
12	6.5538	5.0959	4.4742	4.1212	3.8911	3.7283	3.6065	3.5118	3.4358	3.3736	3.2773	3.1772	3.0728	3.0187	2.963	2.906	2.848	2.787	2.725
13	6.4143	4.9653	4.3472	3.9959	3.7667	3.6043	3.4827	3.3880	3.3120	3.2497	3.1532	3.0527	2.9477	2.8932	2.837	2.780	2.720	2.659	2.595
14	6.2979	4.8567	4.2417	3.8919	3.6634	3.5014	3.3799	3.2853	3.2093	3.1469	3.0502	2.9493	2.8437	2.7888	2.732	2.674	2.614	2.552	2.487
15	6.1995	4.7650	4.1528	3.8043	3.5764	3.4147	3.2934	3.1987	3.1227	3.0602	2.9633	2.8621	2.7559	2.7006	2.644	2.585	2.524	2.461	2.395
16	6.1151	4.6867	4.0768	3.7294	3.5021	3.3406	3.2194	3.1248	3.0488	2.9862	2.8890	2.7875	2.6808	2.6252	2.568	2.509	2.447	2.383	2.316
17	6.0420	4.6189	4.0112	3.6648	3.4379	3.2767	3.1556	3.0610	2.9849	2.9222	2.8249	2.7230	2.6158	2.5598	2.502	2.442	2.380	2.315	2.247
18	5.9781	4.5597	3.9539	3.6083	3.3820	3.2209	3.0999	3.0053	2.9291	2.8664	2.7689	2.6667	2.5590	2.5027	2.445	2.384	2.321	2.256	2.187
19	5.9216	4.5075	3.9034	3.5587	3.3327	3.1718	3.0509	2.9563	2.8801	2.8172	2.7196	2.6171	2.5089	2.4523	2.394	2.333	2.270	2.203	2.133
20	5.8715	4.4613	3.8587	3.5147	3.2891	3.1283	3.0074	2.9128	2.8365	2.7737	2.6758	2.5731	2.4645	2.4076	2.349	2.287	2.223	2.156	2.085
21	5.8266	4.4199	3.8188	3.4754	3.2501	3.0895	2.9686	2.8740	2.7977	2.7348	2.6368	2.5338	2.4247	2.3675	2.308	2.246	2.182	2.114	2.042
22	5.7863	4.3828	3.7829	3.4401	3.2151	3.0546	2.9338	2.8392	2.7628	2.6998	2.6017	2.4984	2.3890	2.3315	2.272	2.210	2.145	2.076	2.003
23	5.7498	4.3492	3.7505	3.4083	3.1835	3.0232	2.9023	2.8077	2.7313	2.6682	2.5699	2.4665	2.3567	2.2989	2.239	2.176	2.111	2.041	1.968
24	5.7166	4.3187	3.7211	3.3794	3.1548	2.9946	2.8738	2.7791	2.7027	2.6396	2.5411	2.4374	2.3273	2.2693	2.209	2.146	2.080	2.010	1.935
25	5.6864	4.2909	3.6943	3.3530	3.1287	2.9685	2.8478	2.7531	2.6766	2.6135	2.5149	2.4110	2.3005	2.2422	2.182	2.118	2.052	1.981	1.906
26	5.6586	4.2655	3.6697	3.3289	3.1048	2.9447	2.8240	2.7293	2.6528	2.5896	2.4908	2.3867	2.2759	2.2174	2.157	2.093	2.026	1.954	1.878
27	5.6331	4.2421	3.6472	3.3067	3.0828	2.9228	2.8021	2.7074	2.6309	2.5676	2.4688	2.3644	2.2533	2.1946	2.133	2.069	2.002	1.930	1.853
28	5.6096	4.2205	3.6264	3.2863	3.0626	2.9027	2.7820	2.6872	2.6106	2.5473	2.4484	2.3438	2.2324	2.1735	2.112	2.048	1.980	1.907	1.829
29	5.5878	4.2006	3.6072	3.2674	3.0438	2.8840	2.7633	2.6686	2.5919	2.5286	2.4295	2.3248	2.2131	2.1540	2.092	2.028	1.959	1.886	1.807
30	5.5675	4.1821	3.5894	3.2499	3.0265	2.8667	2.7460	2.6513	2.5746	2.5112	2.4120	2.3072	2.1952	2.1359	2.074	2.009	1.940	1.866	1.787
40	5.4239	4.0510	3.4633	3.1261	2.9037	2.7444	2.6238	2.5289	2.4519	2.3882	2.2882	2.1819	2.0677	2.0069	1.943	1.875	1.803	1.724	1.637
60	5.2856	3.9253	3.3425	3.0077	2.7863	2.6274	2.5068	2.4117	2.3344	2.2702	2.1692	2.0613	1.9445	1.8817	1.815	1.744	1.667	1.581	1.482
120	5.1523	3.8046	3.2269	2.8943	2.6740	2.5154	2.3948	2.2994	2.2217	2.1570	2.0548	1.9450	1.8249	1.7597	1.690	1.614	1.530	1.433	1.310
inf	5.0239	3.6889	3.1161	2.7858	2.5665	2.4082	2.2875	2.1918	2.1136	2.0483	1.9447	1.8326	1.7085	1.6402	1.566	1.484	1.388	1.268	1.000

$\alpha = 0.025$

gl2/ gl1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	INF
1	4052.181	4999.500	5403.352	5624.583	5763.650	5858.986	5928.356	5981.070	6022.473	6055.847	6106.321	6157.285	6208.730	6234.631	6260.649	6286.782	6313.030	6339.391	6365.864
2	98.503	99.000	99.166	99.249	99.299	99.333	99.356	99.374	99.388	99.399	99.416	99.433	99.449	99.458	99.466	99.474	99.482	99.491	99.499
3	34.116	30.817	29.457	28.710	28.237	27.911	27.672	27.489	27.345	27.229	27.052	26.872	26.690	26.598	26.505	26.411	26.316	26.221	26.125
4	21.198	18.000	16.694	15.977	15.522	15.207	14.976	14.799	14.659	14.546	14.374	14.198	14.020	13.929	13.838	13.745	13.652	13.558	13.463
5	16.258	13.274	12.060	11.392	10.967	10.672	10.456	10.289	10.158	10.051	9.888	9.722	9.553	9.466	9.379	9.291	9.202	9.112	9.020
6	13.745	10.925	9.780	9.148	8.746	8.466	8.260	8.102	7.976	7.874	7.718	7.559	7.396	7.313	7.229	7.143	7.057	6.969	6.880
7	12.246	9.547	8.451	7.847	7.460	7.191	6.993	6.840	6.719	6.620	6.469	6.314	6.155	6.074	5.992	5.908	5.824	5.737	5.650
8	11.259	8.649	7.591	7.006	6.632	6.371	6.178	6.029	5.911	5.814	5.667	5.515	5.359	5.279	5.198	5.116	5.032	4.946	4.859
9	10.561	8.022	6.992	6.422	6.057	5.802	5.613	5.467	5.351	5.257	5.111	4.962	4.808	4.729	4.649	4.567	4.483	4.398	4.311
10	10.044	7.559	6.552	5.994	5.636	5.386	5.200	5.057	4.942	4.849	4.706	4.558	4.405	4.327	4.247	4.165	4.082	3.996	3.909
11	9.646	7.206	6.217	5.668	5.316	5.069	4.886	4.744	4.632	4.539	4.397	4.251	4.099	4.021	3.941	3.860	3.776	3.690	3.602
12	9.330	6.927	5.953	5.412	5.064	4.821	4.640	4.499	4.388	4.296	4.155	4.010	3.858	3.780	3.701	3.619	3.535	3.449	3.361
13	9.074	6.701	5.739	5.205	4.862	4.620	4.441	4.302	4.191	4.100	3.960	3.815	3.665	3.587	3.507	3.425	3.341	3.255	3.165
14	8.862	6.515	5.564	5.035	4.695	4.456	4.278	4.140	4.030	3.939	3.800	3.656	3.505	3.427	3.348	3.266	3.181	3.094	3.004
15	8.683	6.359	5.417	4.893	4.556	4.318	4.142	4.004	3.895	3.805	3.666	3.522	3.372	3.294	3.214	3.132	3.047	2.959	2.868
16	8.531	6.226	5.292	4.773	4.437	4.202	4.026	3.890	3.780	3.691	3.553	3.409	3.259	3.181	3.101	3.018	2.933	2.845	2.753
17	8.400	6.112	5.185	4.669	4.336	4.102	3.927	3.791	3.682	3.593	3.455	3.312	3.162	3.084	3.003	2.920	2.835	2.746	2.653
18	8.285	6.013	5.092	4.579	4.248	4.015	3.841	3.705	3.597	3.508	3.371	3.227	3.077	2.999	2.919	2.835	2.749	2.660	2.566
19	8.185	5.926	5.010	4.500	4.171	3.939	3.765	3.631	3.523	3.434	3.297	3.153	3.003	2.925	2.844	2.761	2.674	2.584	2.489
20	8.096	5.849	4.938	4.431	4.103	3.871	3.699	3.564	3.457	3.368	3.231	3.088	2.938	2.859	2.778	2.695	2.608	2.517	2.421
21	8.017	5.780	4.874	4.369	4.042	3.812	3.640	3.506	3.398	3.310	3.173	3.030	2.880	2.801	2.720	2.636	2.548	2.457	2.360
22	7.945	5.719	4.817	4.313	3.988	3.758	3.587	3.453	3.346	3.258	3.121	2.978	2.827	2.749	2.667	2.583	2.495	2.403	2.305
23	7.881	5.664	4.765	4.264	3.939	3.710	3.539	3.406	3.299	3.211	3.074	2.931	2.781	2.702	2.620	2.535	2.447	2.354	2.256
24	7.823	5.614	4.718	4.218	3.895	3.667	3.496	3.363	3.256	3.168	3.032	2.889	2.738	2.659	2.577	2.492	2.403	2.310	2.211
25	7.770	5.568	4.675	4.177	3.855	3.627	3.457	3.324	3.217	3.129	2.993	2.850	2.699	2.620	2.538	2.453	2.364	2.270	2.169
26	7.721	5.526	4.637	4.140	3.818	3.591	3.421	3.288	3.182	3.094	2.958	2.815	2.664	2.585	2.503	2.417	2.327	2.233	2.131
27	7.677	5.488	4.601	4.106	3.785	3.558	3.388	3.256	3.149	3.062	2.926	2.783	2.632	2.552	2.470	2.384	2.294	2.198	2.097
28	7.636	5.453	4.568	4.074	3.754	3.528	3.358	3.226	3.120	3.032	2.896	2.753	2.602	2.522	2.440	2.354	2.263	2.167	2.064
29	7.598	5.420	4.538	4.045	3.725	3.499	3.330	3.198	3.092	3.005	2.868	2.726	2.574	2.495	2.412	2.325	2.234	2.138	2.034
30	7.562	5.390	4.510	4.018	3.699	3.473	3.304	3.173	3.067	2.979	2.843	2.700	2.549	2.469	2.386	2.299	2.208	2.111	2.006
40	7.314	5.179	4.313	3.828	3.514	3.291	3.124	2.993	2.888	2.801	2.665	2.522	2.369	2.288	2.203	2.114	2.019	1.917	1.805
60	7.077	4.977	4.126	3.649	3.339	3.119	2.953	2.823	2.718	2.632	2.496	2.352	2.198	2.115	2.028	1.936	1.836	1.726	1.601
120	6.851	4.787	3.949	3.480	3.174	2.956	2.792	2.663	2.559	2.472	2.336	2.192	2.035	1.950	1.860	1.763	1.656	1.533	1.381
inf	6.635	4.605	3.782	3.319	3.017	2.802	2.639	2.511	2.407	2.321	2.185	2.039	1.878	1.791	1.696	1.592	1.473	1.325	1.000

ANEXA E: Tabelul valorilor critice ale distribuției χ^2



g/\α	.100	.050	.025	.010	.005
1	2.70554	3.84146	5.02389	6.63490	7.87944
2	4.60517	5.99146	7.37776	9.21034	10.59663
3	6.25139	7.81473	9.34840	11.34487	12.83816
4	7.77944	9.48773	11.14329	13.27670	14.86026
5	9.23636	11.07050	12.83250	15.08627	16.74960
6	10.64464	12.59159	14.44938	16.81189	18.54758
7	12.01704	14.06714	16.01276	18.47531	20.27774
8	13.36157	15.50731	17.53455	20.09024	21.95495
9	14.68366	16.91898	19.02277	21.66599	23.58935
10	15.98718	18.30704	20.48318	23.20925	25.18818
11	17.27501	19.67514	21.92005	24.72497	26.75685
12	18.54935	21.02607	23.33666	26.21697	28.29952
13	19.81193	22.36203	24.73560	27.68825	29.81947
14	21.06414	23.68479	26.11895	29.14124	31.31935
15	22.30713	24.99579	27.48839	30.57791	32.80132
16	23.54183	26.29623	28.84535	31.99993	34.26719
17	24.76904	27.58711	30.19101	33.40866	35.71847
18	25.98942	28.86930	31.52638	34.80531	37.15645
19	27.20357	30.14353	32.85233	36.19087	38.58226
20	28.41198	31.41043	34.16961	37.56623	39.99685
21	29.61509	32.67057	35.47888	38.93217	41.40106
22	30.81328	33.92444	36.78071	40.28936	42.79565
23	32.00690	35.17246	38.07563	41.63840	44.18128
24	33.19624	36.41503	39.36408	42.97982	45.55851
25	34.38159	37.65248	40.64647	44.31410	46.92789
26	35.56317	38.88514	41.92317	45.64168	48.28988
27	36.74122	40.11327	43.19451	46.96294	49.64492
28	37.91592	41.33714	44.46079	48.27824	50.99338
29	39.08747	42.55697	45.72229	49.58788	52.33562
30	40.25602	43.77297	46.97924	50.89218	53.67196

BCU IASI

ANEXA F: Tabelul valorilor critice pentru testul Mann Whitney *U*

$\alpha = 0.025$, test unilateral

n_1 \ n_2	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1												
2	0	0	0	1	1	1	1	1	2	2	2	2
3	2	3	3	4	4	5	5	6	6	7	7	8
4	4	5	6	7	8	9	10	11	11	12	13	13
5	7	8	9	11	12	13	14	15	17	18	19	20
6	10	11	13	14	16	17	19	21	22	24	25	27
7	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34
8	15	17	19	22	24	26	29	31	34	36	38	41
9	17	20	23	26	28	31	34	37	39	42	45	48
10	20	23	26	29	33	36	39	42	45	48	52	55
11	23	26	30	33	37	40	44	47	51	55	58	62
12	26	29	33	37	41	45	49	53	57	61	65	69
13	28	33	37	41	45	50	54	59	63	67	72	76
14	31	36	40	45	50	55	59	64	67	74	78	83
15	34	39	44	49	54	59	64	70	75	80	85	90
16	37	42	47	53	59	64	70	75	81	86	92	98
17	39	45	51	57	63	67	75	81	87	93	99	105
18	42	48	55	61	67	74	80	86	93	99	106	112
19	45	52	58	65	72	78	85	92	99	106	113	119
20	48	55	62	69	76	83	90	98	105	112	119	127

$\alpha = 0.05$, test unilateral

n_1 \ n_2	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1											0	0
2	1	1	1	2	2	2	3	3	3	4	4	4
3	3	4	5	5	6	7	7	8	9	9	10	11
4	6	7	8	9	10	11	12	14	15	16	17	18
5	9	11	12	13	15	16	18	19	20	22	23	25
6	12	14	16	17	19	21	23	25	26	28	30	32
7	15	17	19	21	24	26	28	30	33	35	37	39
8	18	20	23	26	28	31	33	36	39	41	44	47
9	21	24	27	30	33	36	39	42	45	48	51	54
10	24	27	31	34	37	41	44	48	51	55	58	62
11	27	31	34	38	42	46	50	54	57	61	65	69
12	30	34	38	42	47	51	55	60	64	68	72	77
13	33	37	42	47	51	56	61	65	70	75	80	84
14	36	41	46	51	56	61	66	71	77	82	87	92
15	39	44	50	55	61	66	72	77	83	88	94	100
16	42	48	54	60	65	71	77	83	89	95	101	107
17	45	51	57	64	70	77	83	89	96	102	109	115
18	48	55	61	68	75	82	88	95	102	109	116	123
19	51	58	65	72	80	87	94	101	109	116	123	130
20	54	62	69	77	84	92	100	107	115	123	130	138

ANEXA G: Tabelul valorilor critice pentru testul Wilcoxon *T*

Unilateral	Bilateral	n = 5	n = 6	n = 7	n = 8	n = 9	n = 10
0.05	0.10	1	2	4	6	8	11
0.025	0.05		1	2	4	6	8
0.01	0.02			0	2	3	5
0.005	0.01				0	2	3
		n = 11	n = 12	n = 13	n = 14	n = 15	n = 16
0.05	0.10	14	17	21	26	30	36
0.025	0.05	11	14	17	21	25	30
0.01	0.02	7	10	13	16	20	24
0.005	0.01	5	7	10	13	16	19
		n = 17	n = 18	n = 19	n = 20	n = 21	n = 22
0.05	0.10	41	47	54	60	68	75
0.025	0.05	35	40	46	52	59	66
0.01	0.02	28	33	38	43	49	56
0.005	0.01	23	28	32	37	43	49
		n = 23	n = 24	n = 25	n = 26	n = 27	n = 28
□ = 0.05	□ = 0.10	83	92	101	110	120	130
□ = 0.025	□ = 0.05	73	81	90	98	107	117
□ = 0.01	□ = 0.02	62	69	77	85	93	102
□ = 0.005	□ = 0.01	55	68	68	76	84	92

BCU IASI/CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

ANEXA G: Tabelul valorilor critice pentru ρ_s

n	Nivelul α		
	0.10	0.05	0.01
5	0.90	1.00	–
6	0.83	0.89	1.00
7	0.71	0.79	0.93
8	0.64	0.74	0.88
9	0.60	0.68	0.83
10	0.56	0.65	0.79
11	0.52	0.61	0.77
12	0.50	0.59	0.75
13	0.47	0.56	0.71
14	0.46	0.54	0.69
15	0.44	0.52	0.66
16	0.42	0.51	0.64
17	0.41	0.49	0.62
18	0.40	0.48	0.61
19	0.39	0.46	0.60
20	0.38	0.45	0.58
21	0.37	0.44	0.56
22	0.36	0.43	0.55
23	0.35	0.42	0.54
24	0.34	0.41	0.53
25	0.34	0.40	0.52
26	0.33	0.39	0.51
27	0.32	0.38	0.50
28	0.32	0.38	0.49
29	0.31	0.37	0.48
30	0.31	0.36	0.47

BCU IASI/CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

BCU IAS/CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Printed and bound in Romania
by punct

BCU IASI/CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

3925/03

BCU IASI/CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

B.C.U. „M. EMINESCU" IAŞI

50.000 lei

BCU IASI/CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

BCU IASI CENTRAL UNIVERSITARA LIBR

ISBN 973-86202-2-8